

Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2005

PRÁCTICA 5

TOPOLOGÍAS DÉBILES

1. Sea E un espacio de Banach, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que $\|x_n\|$ está acotada y que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
(Sug: usar Principio de Acotación uniforme y la inclusión canónica en el bidual)
2. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\varphi_n \rightarrow \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$.
3. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$.
 - a) Si $x_n \rightarrow x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.
 - b) Si $\dim E < \infty$, $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.
4.
 - a) Sea E un espacio de Banach, $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. φ es continua si y sólo si φ es continua de (E, w) en \mathbb{C} .
 - b) Sean E y F espacios de Banach, $T : E \rightarrow F$ lineal. T es continua si y sólo si T es continua de (E, w) en (F, w) .
5. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x .
6. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$.
7. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, sea $S = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. En (E, w) , S tiene interior vacío.
8. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.
9. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ y $x_n \rightarrow x$ entonces $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$.
10. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$.
 - a) $\varphi_n \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.
 - b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.
11. Definamos $\varphi_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \dots) = x_n$.
 - a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. ¿ $\varphi_n \rightarrow 0$?
 - b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión w^* -convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, w^*)$ es compacta?

12. Sean $\varphi_n : C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(f) = f\left(\frac{-1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero $\varphi_n \not\xrightarrow{w} 0$.

13. Si $1 \leq p < \infty$, en ℓ^p , sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

- a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w^*} 0$
 b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{w^*} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w^*} 0$

14. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces

$$x^n \xrightarrow{w} x \iff \sup \|x^n\|_p < \infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^n = x_k \quad \forall k$$

15. a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0, 1]$. Entonces

$$\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \iff \sup \|\varphi_n\|_p < \infty \wedge \int_0^a \varphi_n(t) dt \rightarrow \int_0^a \varphi(t) dt \quad \forall a \in [0, 1]$$

b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0, 1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ pero $\varphi_n \not\xrightarrow{w^*} 0$.

16. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0, 1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \iff M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{w} M_\varphi(f) \quad \forall f \in L^2[0, 1]$$

17. $C[0, 1]$ es cerrado en $L^\infty[0, 1]$ en $\|\cdot\|_\infty$ pero no en la topología w^* .

18. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

- a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in c'_0$ y calcular su norma.
 b) Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ y que $\varphi_n \not\xrightarrow{w} 0$.
 c) $c_0 \supset \circ\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset \circ\langle\{\varphi_1, \varphi_2\}\rangle \supset \dots \supset \circ\langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}\rangle \supset \dots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿Ocurre lo mismo con $\circ\langle\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty\rangle$?

19. a) Si E es un espacio vectorial, $f_1, \dots, f_n, f : E \rightarrow \mathbb{C}$ son transformaciones lineales tales que $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$, entonces $f \in \langle\{f_i\}_i\rangle$

b) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \rightarrow \mathbb{C}$ es lineal y w^* -continua, entonces existen $c > 0$, $x_1, \dots, x_n \in E$ tales que

$$|f(\varphi)| \leq c \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi(x_i)| \quad \forall \varphi \in E'$$

c) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \rightarrow \mathbb{C}$ es lineal y w^* -continua, entonces existe $x \in E$ tal que $f(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in E'$

20. Sean E un espacio de Banach, $J : E \rightarrow E''$ la inclusión canónica.

- a) $J(B_E)$ es fuertemente cerrado, donde B_E es la bola unidad cerrada de E .
 b) Dar un ejemplo en el que J no sea suryectiva.

21. Sean E y F espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F'$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}$ está acotada.
22. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E'$.
- (i) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0 / \varphi(x) = \|\varphi\| \|x\|$
 - (ii) Si M es un subespacio cerrado propio de E' , $\exists x \in {}^\circ M, \|x\| = 1 / \varphi(x) = d(\varphi, M)$
23. a) Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable, entonces E es separable.
(Sug: Si $\{\varphi_n\}$ es denso numerable en $\{\varphi \in E' / \|\varphi\| = 1\}$, tomar $\{x_n\} \in E, \|x_n\| = 1$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{3}{4}$ y ver que $\langle \{x_n\} \rangle$ es denso en E)
- b) Dar un ejemplo de E separable tal que E' no sea separable.
24. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que E es separable si y sólo si S y E/S lo son.
25. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ w^* -convergente.
(Sug: Si $\{x_k\}$ es denso en E , $\{\varphi_n(x_1)\}_n$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_1}(x_1)\}_{n_1}$, también, $\{\varphi_{n_1}(x_2)\}_{n_1}$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_2}$, seguir inductivamente y ver que $\{\varphi_{n_k}\}_k$ es w^* -convergente)
26. Sea E un espacio de Banach reflexivo.
- Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E , entonces tiene una subsucesión w -convergente.
(Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S' es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)
 - Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E' , entonces tiene una subsucesión w^* -convergente.
27. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E', \|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.
28. Sea E un espacio de Banach separable, y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en B_E . Probar que la topología débil* en $B_{E'}$ puede darse mediante la métrica

$$d(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{2^n}$$

29. Sea $H_0^1[0, 1] = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$ (siendo H^1 el espacio de Sobolev introducido en la práctica anterior) y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(0, 1)$. Probar que si $u_n \xrightarrow{w} u$, entonces existe una subsucesión u_{n_k} tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ en $C[0, 1]$ (Esto dice que la inclusión $i : H_0^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ es un operador compacto)
30. Consideramos la funcional no lineal $J : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx$$

donde $f \in L^2[0, 1]$.

- a) Probar que J es débilmente semicontinua inferiormente. (o sea: semicontinua inferiormente en la topología débil de H_0^1)
- b) Probar que $J(u) \rightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H^1} \rightarrow +\infty$.
- c) Concluir que J tiene un mínimo. Probar que la u_0 que realiza el mínimo es solución débil de $-u'' = f$, con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.
(Sugerencia: si u_0 es un punto donde J alcanza el mínimo, la función de la variable real $g(t) = J(u_0 + t\varphi)$ tiene un mínimo en $t = 0$. Calcular $g'(0)$.)
- d) Si $f \in C[0, 1]$, u_0 resuelve $-u'' = f$ en sentido clásico.