

Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2005

OPERADORES ACOTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT

1. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|, \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|$$

2. Sean H un espacio de Hilbert, $T, S \in \mathcal{L}(H)$, $T^*, S^* \in \mathcal{L}(H)$ sus operadores adjuntos.

a) $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$.

b) $(ST)^* = T^*S^*$.

c) $\|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

3. Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se verifica:

a) $\ker(T) = R(T^*)^\perp$

b) $(\ker(T))^\perp = \overline{R(T^*)}$

c) $\ker(T^*) = R(T)^\perp$

d) $(\ker(T^*))^\perp = \overline{R(T)}$

4. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sup_n |\langle T_n x, y \rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

5. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

a) T es una isometría

b) $T^*T = I$

c) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$

Definiciones: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert.

a) T es autoadjunto si $T^* = T$

b) T es normal si $T^*T = TT^*$

c) T es unitario si es inversible y $T^{-1} = T^*$

d) T es positivo si $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

6. a) Si $\varphi \in L^\infty[0, 1]$, sea $M_\varphi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ el operador de multiplicación. Calcular M'_φ , probar que M_φ es normal y caracterizar $\{\varphi \in L^\infty[0, 1] : M_\varphi \text{ es unitario}\}$.
- b) Si $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A' , probar que A es normal y caracterizar $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A \text{ es unitario}\}$.
7. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
- T es unitario.
 - T^* es unitario.
 - T es una isometría suryectiva.
 - T y T^* son isometrías.
8. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Entonces:
- $\|T^2\| = \|T\|^2$
 - $\ker(T) = \ker(T')$
 - $T^2 = T \implies T$ es autoadjunto.
 - $T^2 = 0 \implies T = 0$.
9. Si H es un espacio de Hilbert, sea $P \in \mathcal{L}(H)$ un operador no nulo tal que $P^2 = P$. Son equivalentes:
- $P^* = P$
 - P es normal
 - $\|P\| = 1$
 - $\ker(P) = R(P)^\perp$
10. Sean H un espacio de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:
- T^*T y TT^* son positivos.
 - Si T es positivo, S^*TS es positivo.
11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\ker(T))^\perp$.
12. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.
- Si $\langle Tx, x \rangle = 0 \ \forall x \in H$ entonces $T = 0$.
 - Dar un contraejemplo de (a) si H es Hilbert real.
 - Si H es un Hilbert real y T es autoadjunto, entonces vale (a).
 - T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$.
13. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$ normales.
- Si $T_n x \rightarrow Tx \ \forall x \in H$ entonces $T'_n x \rightarrow T'x \ \forall x \in H$.
 - Dar un contraejemplo si T_n no son normales.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

- a) T es autoadjunto
- b) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- c) $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- d) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H$
- e) $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle \quad \forall x \in H$

Definición: Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice isometría parcial si $T|_{(\ker T)^\perp}$ es isometría.

15. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. T es isometría parcial si y sólo si T^*T es proyector.

16. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x \rangle = 0\}$ es un subespacio de H .

17. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Si $x \in H$ es tal que $Tx \neq 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}, T^n x \neq 0$.

Definición: Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de H . Diremos que $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt si $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge, y notaremos

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

18. Probar que:

- a) $\|T\|_2$ no depende de la base elegida.
- b) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ y $\|T\| \leq \|T\|_2$.
- c) $\langle S, T \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n \rangle$, es un producto interno que define $\|\cdot\|_2$ y hace de los operadores de Hilbert-Schmidt un espacio de Hilbert.

19. Probar que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y que si T es de Hilbert-Schmidt y $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces ST y TS son de Hilbert-Schmidt con $\|ST\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2$ y $\|TS\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2$.

20. a) Si $K \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$ es un operador integral, probar que entonces K es de Hilbert-Schmidt y calcular $\|K\|_2$.

b) >Bajo qué condición sobre la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ el operador $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $Tx = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Hilbert-Schmidt?

c) Dar un ejemplo de un operador compacto que no sea de Hilbert-Schmidt.