**Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2005**

**Práctica 8: Espectro de un operador - Cálculo funcional**

1. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

   *a*) Si $\alpha_n \to 0$, hallar $\sigma(T)$.

   *b*) Hallar $\sigma(T)$ en el caso general ($\alpha_n \in \ell^\infty$).

2. Sean $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\overline{U})$ y $M_\varphi \in \mathcal{L}(C(\overline{U}))$ el operador de multiplicación.

   *a*) Dar condiciones necesarias y suficientes para que $M_\varphi$ sea inversible.

   *b*) Calcular $\sigma(M_\varphi)$

   *c*) Dar condiciones necesarias y suficientes para que $M_\varphi$ sea compacto.

3. Si $1 < p < \infty$, sean $S$ y $T$ en $\mathcal{L}(\ell^p)$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

   *a*) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq 1\}$ y que si $|\lambda| < 1$ entonces $\lambda$ es un autovalor.

   *b*) Calcular $\sigma(S)$

   *c*) Probar que $S$ no tiene autovalores.

4. Sean $E$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$.

   *a*) Si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   *b*) Si $T$ es inversible y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$

5. Sea $H$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$.

   *a*) Si $A$ es autodjunto, entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

   *b*) Si $A$ es unitario, entonces $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

6. Si $1 < p < \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

   $$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$$

   *a*) Probar que $T$ no es compacto.

   *b*) Probar que $T^2$ sí es compacto.

   *c*) Calcular $\sigma(T)$

7. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra dado por

   $$Vf(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

   Calcular $\sigma(V)$

8. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ el operador de multiplicación. Hallar $\sigma(M_\varphi)$ en los siguientes casos:

*a*) $\varphi$ continua en [0,1].

*b*) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

9. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador acotado, definimos

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

*a*) Probar que $e^A \in \mathcal{L}(X)$ y que $x(t) = e^A x_0$ proporciona la única solución de la ecuación diferencial:

$$x'(t) = Ax(t)$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$.

*b*) Probar que si $A$ y $B$ conmutan, entoncs vale la fórmula:

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

*c*) Si $X$ es un espacio de Hilbert complejo, y si $A$ es autoadjunto probar que $e^A$ es autoadjunto y positivo, y que $e^{iA}$ resulta unitario.

10. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $X$ un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador acotado tal que $\sigma(A) \subset U$. Sea $f_n : U \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas en $U$, que converge una función $f$ uniformemente sobre compactos de $U$. Probar que $f_n(A) \to f(A)$ en $\mathcal{L}(X)$.

11. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$. Supongamos que existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|\lambda x_n - Ax_n\| \to 0$. Probar que $\lambda \in \sigma(A)$.

12. Sea $X$ un espacio de Banach. Supongamos que $\sigma(A) = K_1 \cup K_2$, donde $K_1$ y $K_2$ son dos compactos disjuntos. Probar que el operador $A$ se puede descomponer como $A = A_1 \oplus A_2$ donde $\sigma(A_1) = K_1 \cup \{0\}$ y $\sigma(A_2) = K_2 \cup \{0\}$.