Series de Fourier

0–Notaciones

Trabajaremos con funciones periódicas de período 2Π

Lema 1: Si f es períodica de período p entonces

$$\int_a^{a+p} f(t)\ dt = \int_o^p f(t)\ dt$$

Dem: En la integral del primer miembro hacemos el cambio de variable $x = t - a$

$$\int_a^{a+p} f(t)\ dt = \int_o^p f(x+a)\ dx$$

pero $f(x+a) = f(x)$ por periodicidad

luego: $\displaystyle\int_a^{a+p} f(t)\ dt = \int_o^p f(x)\ dx$

Def.: Si f,g son dos funciones introducimos su producto escalar por:

$$< f,g > \ = \int_0^{2\pi} f(x)\ \overline{g(x)}\ dx$$

y su norma por $\| f \| = \sqrt{<f,f>}$

Su convolución $h = f * g$ es la función

$$h(x) = \int_0^{2\Pi} f(t)\ g(x-t)\ dt$$

Lema 2: Si f,g son funciones períodicas de período 2Π entonces $f * g = g * f$

Dem: Por definición

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\Pi} f(t)\ g(x-t)\ dt$$

Hagamos el cambio de variable $u = x - t$

$$(f * g)(x) = -\int_x^{x-2\Pi} f(x-u)\ g(u)\ du = \int_{x-2\Pi}^{x} f(x-u)\ g(u)\ du$$

Aquí el integrando tiene período 2Π (por tenerlo f,g) luego por el lema 1

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\Pi} f(x-u)\ g(u)\ du = (g * f)(x)$$

1– Forma compleja del sistema trigonometrico

Notacion: $e_n(x) = e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ es el sistema trigonométrico (en forma compleja)

Tenemos $\displaystyle\int_0^{2\Pi} e^{nx}\, dx = \left[\frac{e^{inx}}{nx} \right]_0^{2\pi} = 0$ si $n \neq 0$

mientras que $\displaystyle\int_0^{2\Pi} e^{nx}\, dx = \int_0^{2\Pi} 1\, dx = 2\pi$ si $n = 0$

Por lo tanto:

$$<e_n, e_m> = \int_0^{2\Pi} e^{inx} \,.\, e^{-imx}\, dx = \int_0^{2\Pi} e^{i(m-n)x}\, dx = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$$

Es decir las funciones $e_n(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$ forman un sistema ortogonal y $\| e_n \| = \sqrt{2\Pi}$

2- <u>Forma real del sistema trigonometrico</u>

Introduzcamos las funciones:

$$s_n(x) = \text{sen } nx \quad c_n(x) = \cos nx \quad (n \in \mathbb{N})$$

Utilizando las fórmulas de Euler tenemos:

$$c_n = 1/2\ (e_n + e_{-n}) \quad s_n = 1/2i\ (e_n - e_{-n})$$

luego obtenemos:

$$<c_n, c_m> = <1/2(e_n + e_{-n}), 1/2\ (e_m + e_{-m})> =$$
$$= 1/4\ [<e_n, e_m> + <e_n, e_{-m}> + <e_{-n}, e_m> + <e_{-n}, e_{-m}>] =$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \pi \text{ si } n = m \end{cases}$$

$$<s_n, c_m> = <1/2i\ (e_n - e_{-n}), 1/2\ (e_m + e_{-m})> =$$
$$= 1/4i\ [<e_n, e_m> - <e_{-n}, em> + <e_{-n}, e_m> - <e_{-n}, e_{-m}>] = 0$$

(tanto si $m = n$ como si $n \neq m$)

$$<s_n, s_m> = <1/2i\ (e_n - e_{-n}), 1/2i\ (e_m - e_{-m})> =$$
$$= 1/4\ [<e_n, e_m> - <e_{-n}, e_m> - <e_n, e_{-m}> + <e_{-n}, e_{-m}>]$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \Pi \text{ si } n = m \end{cases}$$

Además concideremos $c_0(x) = 1$ entonces

$$<c_n, c_0> = <1/2\ (e_n + e_{-n}), e_0> = 1/2\ [<e_n, e_0> + <e_{-n}, e_0>] =$$
$$= \begin{cases} 2\pi \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$<s_n, c_0> = <1/2i\ (e_n - e_{-n}), e_0> = 1/2i\ [<e_n, e_0> - <e_{-n}, e_0>] = 0$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$

Conclusion: las funciones $s_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ y $c_n(x)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ forman un sistema ortogonal.

3- <u>Polinomios Trigonometricos</u>

Una expresión de la forma

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$$

se llama un polinomio trigonométrico

Poniendo $z = e^{ix}$ tenemos $T(x)= \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k z^k$ expresión análoga a la de un polinomio ordinario

Otra forma de expresarlo es usar las fórmulas de Euler

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (\cos kx + i \operatorname{sen} kx)$$

Como $\cos(-kx) = \cos kx$ y $\operatorname{sen}(-kx) = \operatorname{sen} kx$

pongamos $a_k = \alpha_k + \alpha_{-k}$ $\quad b_k = i(\alpha_k - \alpha_{-k})$ entonces

$$T(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} bk)$$

3- <u>El desarrollo de Fourier de una funcion periodica</u>

Si f es una función periódica de período 2Π intentemos desarrollarla en la forma $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n(x)$

Operando formalmente:

$$< f, e_k > = < \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e_m , e_k > = \alpha_n < e_n, e_k > = \alpha_k . 2\Pi$$

luego los coeficientes de Fourier son:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\Pi} < f, e_k > = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\Pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

La hipótesis natural es que $f \in L^1[0,2\pi]$

Si queremos expresar esto en forma de senos y cosenos encontramos que podemos escribir

$$f = = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} bk)$$

donde los a_k, b_k se relacionan con los α_k como antes por las relaciones:

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} \qquad b_k = i(\alpha_k - \alpha_{-k})$$

Entonces:

$$a_k = \frac{1}{\Pi} \int_o^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt \qquad b_k = \frac{1}{\Pi} \int_o^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt$$

queremos investigar si la serie de Fourier realmente converge a f

4- Expresion para las sumas parciales de la serie de Fourier

Sea

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} bk)$$

el polinomio trigonométrico que es la n-ésima suma parcial del desarrollo de Fourier de f

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2\Pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right] dt$$

llamamos $D_n(x) = \dfrac{1}{2\Pi} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$

$$S_n(z) = \int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt = f * D_n$$

(S_n es la convolución de f y D_n)

D_n se llama el núcleo de Dirichlet.También se puede escribir

$$D_n(t) = \frac{1}{2\Pi} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} 2 \cos kt \right] = \frac{1}{\Pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right]$$

Poniendo $z = e^{ix}$ tenemos:

$$D_n(z) = \frac{1}{2\Pi} \sum_{k=-n}^{n} z^k = \frac{1}{2\Pi} z^{-n} \sum_{k=0}^{2n} z^k = \frac{1}{2\Pi} z^{-n} \frac{z^{2n+1} - 1}{z - 1} =$$

$$D_n(z) = \frac{1}{2\Pi} \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z - 1}$$

Multiplicando numerador y denominador por $z^{-1/2}$ resulta

$$D_n(z) = \frac{1}{2\Pi} \frac{z^{n+1/2} - z^{-n-1/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} = \frac{1}{2\Pi} \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{1/2ix} - e^{-1/2ix}}$$

Dividiendo el numerador y denorminador por 2i y recordando la fórmula de Euler: $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$D_n(x) = \frac{1}{2\Pi} \frac{\operatorname{sen} (n+1/2)x}{\operatorname{sen} x/2}$$

Teorema: Sea $f \in L^1[0,2\pi]$

Las sumas parciales $S_n(x)$ de la serie de Fourier de f vienen dadas

por $S_n = f * D_n$ donde $D_n(x) = \dfrac{1}{2\Pi} \dfrac{\text{sen } (n+1/2)x}{\text{sen } x/2}$

Es decir: $S_n(x) = \dfrac{1}{2\Pi} \displaystyle\int_o^{2\pi} f(t) \dfrac{\text{sen } [(n+1/2)(x-t)]}{\text{sen } 1/2(x-t)} dt$

Obs: Naturalmente podemos escribir: $S_n = D_n * f$, o sea:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\pi} f(x-t) \frac{\text{sen } (n+1/2)t}{\text{sen } 1/2t} dt$$

Entonces:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\pi} [f(x-t)-f(x)] \frac{\text{sen } (n+1/2)t}{\text{sen } 1/2t} dt$$

y para que la serie de Fourier converja a f(x) es

necesario y suficiente que esta integral tienda a cero cuando $n \to \infty$

Para investigar la convergencia de esta integral hacia cero es de fundamental importancia el siguiente

Lema (de Riemman-Lebesgue) Si $f \in L^1[a,b]$ entonces

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \text{ sen } px \, dx = 0 \quad (p \in \mathbb{R})$$

Dem: supongamos primero que $\varphi \in C^1[a,b]$ entonces integrando por partes

$$\int_a^b \varphi(x) \text{ sen } px \, dx = \int_a^b \varphi(x) \left[- \frac{\cos px}{p}\right]' dx =$$

$$- \varphi(x) \frac{\cos px}{p} \Bigg|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} dx =$$

$$= \varphi(a) \frac{\cos pa}{p} - \varphi(b) \frac{\cos pb}{p} + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} dx$$

de donde si $|\varphi'(x)| \leqslant M$ en $[a,b]$ tenemos:

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \text{ sen } px \, dx \right| \leqslant \left|\varphi(a) \frac{\cos pa}{p}\right| + \left| \varphi(b) \frac{\cos pb}{p} \right|$$

$$+ \int_a^b |\varphi'(x)| \frac{|\cos px|}{p} dx \leqslant \frac{\varphi(b) + \varphi(a)}{p} + (b-a) \frac{M}{p} \to 0 \text{ cuando } p \to \infty$$

Como $C^1[a,b]$ (e incluso los polinomios) es denso en $L^1[a,b]$

si $\varphi \in L^1[a,b]$ encontramos una $\tilde{\varphi} \in C^1[a,b]$ tal que

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \|_1 = \int_a^b |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces tendremos:

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \text{ sen } px \, dx\right| \leqslant \left|\int_a^b \varphi(x) \text{ sen } px \, dx - \int_a^b \tilde{\varphi}(x) \text{ sen } px \, dx \right| +$$

$$+ \left|\int_a^b \tilde{\varphi}(x) \text{ sen } px \, dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \, dx + \left|\int_a^b \tilde{\varphi}(x) \text{ sen } px \, dx\right|$$

por lo antes probado si $p \geqslant p_o$

$$\left|\int_a^b \tilde{\varphi}(x) \text{ sen } px \, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

con lo que $\left|\int_a^b \varphi(x) \text{ sen } px \, dx\right| < \varepsilon$ si $p \geqslant p_o$

probado el lema de Riemman-Lebesgue vamos a demostrar:

<u>Teorema:</u> Si f es períodica e integrable ($\in L^1[0,2\pi]$)

y para x fijo existe la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt$$

para algún $\delta > 0$ entonces la serie de fourier converge (puntualmente) en el punto x hacia $f(x)$, en otras palabras $S_n(x) \to f(x)$ (condición de Dini)

<u>Dem:</u> ya vimos que

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t)-f(x)] \frac{\text{sen } (n+1/2)t}{\text{sen } 1/2t} dt$$

si podemos ver que $g(t) = \dfrac{f(x-t)-f(x)}{\text{sen } 1/2t} \in L^1[-\pi,\pi]$

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ \text{sen}(n+1/2)t \ \ dt$$

el resultado se sigue inmediatamente del lema de Riemman-Lebesgue

La idea de la demostración es separar los valores de t en dos clases: t pequeño ($|t| < \delta$ de modo que x-t está cerca de x) y t grande ($|t| \geqslant \delta$) [por comodidad escribimos los límites de integración como

$-\pi$ y π es lo mismo ya que las funciones son períodicas]

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| = \int_{|t|\leqslant\delta} |g(t)|\ dt + \int_{|t|>\delta} |g(t)|\ dt$$

en $|t| \geqslant \delta$ la función continua sen 1/2t no se anula $\Rightarrow$ alcanza un mínimo M>0 sen $1/2t \geqslant M\ \forall t \in [-\pi,\pi]$ con $|t| \geqslant \delta$

$$\int_{|t|>\delta} |g(t)|\ dt \leqslant \int_{|t|>\delta} \frac{|f(x-t)-f(x)|}{M}\ dt \leqslant \frac{2}{M}\ \| f \|_1 < \infty \text{ pues } f \in L^1$$

(aquí $\| f \|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\ dt$)

cuando t es pequeño sen $1/2t \cong 1/2\ t$ escribamos pues:

$$\int_{|t|\leqslant\delta} |g(t)|\ dt = \int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \ \frac{t}{\text{sen } 1/2t}\ dt =$$

$$= \int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \ \ h(t)\ dt$$

$$\text{donde } h(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\text{sen } 1/2t} & \text{si } t \neq 0 \\ 2 \ \ \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es una función continua $\Rightarrow$ en $|t| \leqslant \delta$ está acotada

se sigue que si $\dfrac{f(x-t)-f(x)}{t} \in L^1[-\delta,\delta] \Rightarrow$ g también

con lo que $g \in L^1[-\pi,\pi]$ como queríamos ver

Obs: La condición de Dini se verifica automáticamente si f es derivable en el punto x, pues entonces como $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$

$\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ está acotada para $t \in [-\delta,\delta] \Rightarrow \in L^1[-\delta,\delta]$

con mayor generalidad esto se verfica si f tiene derivada finita a la izquierda y derecha (por ejemplo si es C^1 a trozos)

otra condición: si f es continua Hölder en x con exponente $\alpha > 0$:

$|f(x+t) - f(x)| \leqslant C\, |t|^{\alpha}$ si $|t| < \delta$

(pues entonces:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt \leqslant C \int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha-1}\, dt = 2C \int_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\, dt = 2C \quad \frac{t^{\alpha}}{\alpha}$$