Teorema de Stone-Weierstrass

Sea K un espacio topológico compacto

$$C(K,\mathbb{R}) = \{ f:K \to \mathbb{R} \text{ continuas } \}$$

$$C(K,\mathbb{C}) = \{ f:K \to \mathbb{C} \text{ continuas } \}$$

con la norma $\| f \| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ son espacios de Banach

(usaremos la notación más breve C(K) si está claro de cuál estamos hablando)

Además es un álgebra de Banach: tiene un producto que satisface

$$\| f.g \| \leqslant \| f \|.\| g \|$$

El teorema clásico de Weirstrass afirma que los polinomios son densos en $C([a,b],\mathbb{R})$ (o sea que una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua se puede aproximar uniformemente por polinomios.

El teorema de Stone-Weirstrass generaliza este resultado.

<u>Def.:</u> Sea E un álgebra de Banach. Una subálgebra de E es un subespacio A tal que si $f,g \in A \Rightarrow f.g \in A$

<u>Def.:</u> Sea $A \subseteq C(X)$ (real o complejo) diremos que A separa puntos si dados $x,y \in X$ tales que $x \neq y \Rightarrow \exists\ f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$

<u>Teorema de Stone-Weierstrass:</u> (caso real) Sea K un compacto.
Si $A \subseteq C(K,\mathbb{R})$ es una subálgebra que separa puntos y contiene a las constantes $\Rightarrow$ A es densa en $C(X,\mathbb{R})$

Necesitamos algunos resultados previos:

<u>Teorema de Dini:</u> Sea K un compacto.
Si una sucesión de funciones continuas $f_n:K \to \mathbb{R}$ tiende puntualmente en forma monótona (creciente o decreciente) a una función continua $f:K \to \mathbb{R} \Rightarrow$ la convergencia es uniforme.

<u>Dem:</u> Cambiando $\{ f_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ por $\{ -f_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ puedo suponer que $\{ f_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente.

Cambiando $\{ f_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ por $\{ f_n - f \}_{n \in \mathbb{N}}$ puedo suponer además que $f = 0$
(o sea que $f_n \to 0$ en forma decreciente, en particular $0 \leqslant f_n$)

Dado $\varepsilon > 0$ sea $U_n = \{ x \in K : f_n(x) < \varepsilon \}$ es abierto pues f_n es continua

$U_n \subseteq U_{n+1}$ por ser $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

Además $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ pues dado $x \in K$ existe n tal que $f_n(x) < \varepsilon$ $(f_n(x) \to 0)$

Por ser K compacto existe un N tal que $K = K = \bigcup_{n=1}^{N} U_n = U_N$

$\Rightarrow 0 \leqslant f_N(x) < \varepsilon \ \forall \ x \in K$ (N no depende de x)

Esto muestra que $f_n \to 0$ uniformemente

Lema: $|x|$ se puede aproximar uniformemente en $[-1,1]$ por polinomios sin término constante.

Dem: Si $0 \leqslant y \leqslant a \leqslant 1$ tenemos

$$0 \leqslant y \leqslant y + \frac{1}{2}(a^2 - y^2) \leqslant a \leqslant 1 \quad (1)$$

Defimos una sucesión de polinomios en x por inducción

$P_o(0) = 0$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) \quad (2)$$

Por inducción se prueba que:

- P_n es una función par de x $[\ P_n(-x) = P_n(x)]$
- $P_n(0) = 0$ [o sea: P_n no tiene término constante]
- $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1} \leqslant |x| \leqslant 1$ por (1) con $a = |x|$, $y = P_n(x)$

$P_n(x)$ es monótona creciente y acotada $\Rightarrow$ es convergente

digamos que $P_n(x) \to z$ entonces haciendo que $n \to \infty$ en (2)

$$z = z + \frac{1}{2}(x^2 - z^2) \Rightarrow x^2 = z^2$$

además tenemos que $0 \leqslant z \leqslant |x|$ (pues $0 \leqslant P_n(x) \leqslant |x|$)

$\Rightarrow z = \sqrt{x^2} = |x|$

luego vimos que $P_n(x)$ tiende a $|x|$ puntualmente en $[-1,1]$ y en forma creciente. Por el teorema de Dini la convergencia es uniforme.

Dem del teorema de Stone-Weierstrass (caso real)

$A \subseteq \mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ una subálgebra que separa puntos

i) Si $g \in A \Rightarrow |g| \in \overline{A}$

Si $g = 0$ nada que probar. Supongo pues $g \neq 0$

considero la función $\dfrac{g(x)}{\| g \|} : K \to [-1,1]$

Dado $\varepsilon > 0$ por el lema anterior existe un polinomio P sin término constante tal que

$$\left| \frac{|g(x)|}{\| g \|} - P\left(\frac{g(x)}{\| g \|} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{\| g \|} \quad \forall\ x \in [-1,1]$$

$P\left(\dfrac{g(x)}{\| g \|} \right) = Q(g(x))$ donde Q es un es un polinomio

$$\frac{1}{\| g \|} \left| \ |g(x)| - Q(g(x)) \ \right| < \frac{\varepsilon}{\| g \|}$$

$$\left| \ |g(x)| - \| g \|.Q(g(x)) \ \right| < \varepsilon$$

pero $\| g \|.Q(g) \in A$ pues A es una subálgebra y $g \in A$

como ε es arbitrario $|g| \in \overline{A}$

Notemos que $\overline{A}$ también es una subálgebra que separa puntos

<u>ii)</u> $\overline{A}$ es cerrada por $|\ |$, max, min: por i) y porque

$$\max\ (f,g) = \frac{f + g + |f-g|}{2}$$

$$\min\ (f,g) = \frac{f + g - |f-g|}{2}$$

<u>iii)</u> sea $f \in C(K,\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$

A separa puntos: dados $x,y \in K$ existe $h \in A$ tal que $h(x) \neq h(y)$

Sea $g_{xy} \in C(K,\mathbb{R})$ dada por:

$$g_{xy}(t) = \frac{f(x) - f(y)}{h(x) - h(y)} .h(t) - \frac{f(x).h(y) - f(y).h(x)}{h(x) - h(y)} =$$

$$= \frac{f(x).[h(t)-h(y)] - f(y).[h(t)-h(x)]}{h(x)-h(y)}$$

$g_{xy} \in A$ (pues es una subálgebra y contiene a las constantes)

$g_{xy}(x) = f(x)$ y $g_{xy}(y) = f(y)$

Fijemos $y \in K$

Para cada $x \in K$ existe un entorno V_x de x tal que $f(t) - \varepsilon < g_{xy}(t)\ \forall\ t \in V_x$

$K = \bigcup_{x \in K} V_x$ por ser K compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$K = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$

Sea $g_y = \mathrm{Max}(g_{x_1 y}, g_{x_2 y}, \ldots, g_{x_n y}) \in \overline{A}$ por ii) y $f(t) - \varepsilon < g_y(t)\ \forall\ t \in K$

notemos que $g_y(y) = y$ [pues $g_{x_i y}(y) = y$ para $i=1,2,\ldots,n$]

Ahora para cada $y \in K$ existe un entorno U_y de y de modo que $g_y(t) < f(t) + \varepsilon$

si $t \in U_y$, $K = \bigcup_{y \in Y} U_y$,y como K es compacto existen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tales que

$K = \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$ sea $g(y) = \min(g_{y_1}, g_{y_2}, \ldots, g_{y_m}) \in \overline{A}$ (por ii))

y $g(y) < f(t) + \varepsilon\ \forall\ t \in K$

por otro lado: tenemos $f(t) - \varepsilon < g_{y_k}(t)$ para $k=1,2,\ldots,n$

y como $g(t)$ es alguno de $g_{y_1}(t), g_{y_2}(t), \ldots, g_{y_k}(t)$: $f(t) - \varepsilon < g(t)$

luego $f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon\ \forall\ t \in K$, o sea:

$\| f - g \| < \varepsilon$

luego vimos que dados f y $\varepsilon > 0$ existe $g \in \overline{A}$ con $\| f - g \| < \varepsilon$

pero $\overline{A}$ es cerrado $\Rightarrow f \in \overline{A}$,o sea: $\overline{A} = C(K,\mathbb{R}) \Rightarrow A$ es denso en $C(K,\mathbb{R})$

<u>Caso complejo:</u>

Con el enunciado anterior el teorema de Stone-Weierstrass es falso para $C(K,\mathbb{C})$:

<u>ejemplo:</u> tomo $K = \overline{\Delta} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1 \}$

las funciones enteras $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ [analíticas en todo el plano] son una subálgebra $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \subseteq C(K,\mathbb{C})$ que separa puntos ,pero $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es denso en $C(K,\mathbb{R})$ [porque el límite uniforme de funciones analíticas es analítico]

Es necesario pedir una condición adicional: que A sea cerrada por conjugación : si $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$

Teorema de Stone-Weierstrass: (caso complejo) Sea K un compacto. Si $A \subseteq C(K,\mathbb{C})$ es una subálgebra que separa puntos, contiene a las constantes (complejas) y es cerrada por conjugación $\Rightarrow$ A es densa en $C(X,\mathbb{C})$

Dem: Sea $A_o = A \cap C(K,\mathbb{R})$

- A_o es una subálgebra de $C(K,\mathbb{R})$
- A_o contiene a las constantes reales
- A_o separa puntos:

Dados $x,y \in K \Rightarrow$ existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y) \Rightarrow Re(f(x)) \neq Re(f(y))$ o bien $Im(f(x)) \neq Im(f(y))$

pero si $f \in A \Rightarrow Re(f)$ e $Im(f) \in A_o$ pues $Re(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ $Im(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2}$ y A es cerrada por conjugación

por el caso real A_o es densa en $C(K,\mathbb{R})$

Sea $f \in C(K,\mathbb{C})$ $f = Re(f) + i\, Im(f)$ con $Re(f), Im(f) \in C(K,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ existen $g,h \in A_o$ tales que $\| Re(f) - g \| < \varepsilon/2$ y $\| Im(f) - h \| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \| f - (g+ih) \| = \| [Re(f) - g] + i\, [Im(f)-h] \| \leqslant$

$\leqslant \| Re(f) - g \| + \| Im(f) - h \| < \varepsilon$

luego A es densa en $C(K,\mathbb{C})$

Ejemplos:

1) $K = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $A = \mathbb{R}[X]$ (polinomios)

$f(x) = x$ separa puntos $\Rightarrow$ los polinomios son densos en $C([a,b],\mathbb{R})$ (teorema clásico de Weierstrass)

2) $K = S^1$ $A = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \ : \ a_k \in \mathbb{C} \right\}$ es denso en $C(S^1,\mathbb{C})$

[$f(z) = z$ separa puntos y es cerrada por conjugación $(z^{-1} = \overline{z})$]

3) Pongamos

$C_{per}(p,\mathbb{C}) = \{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuascon período p : $f(x+p) = f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R} \}$

con la norma $\| f \| = \sup_{x \in [0,p]} |f(x)|$

Reinterpretando el ejemplo 2) (uso $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) se obtiene que

$A = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e^{ikt} \right\}$ (polinomios trigonométricos) es denso en $C_{per}(2\pi,\mathbb{C})$

(otro teorema clásico de Weierstrass)

4) Análogamente pongamos

$C_{per}(p,\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas con período p : $f(x+p) = f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R} \}$

$A = \left\{ a_o + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \text{ sen } kt) \right\}$ es denso en $C_{per}(2\pi,\mathbb{C})$

<u>Aplicacion: la base trigonometrica en $L^2[0,2\pi]$</u>:

En $L^2[0,2\pi]$ considero los elementos

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$< x_k, x_n > = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} e^{ikt} . e^{-int}\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} e^{i(k-n)t}\ dt = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ si } k \neq n \end{cases}$$

luego los $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forman un sistema ortonormal.

Veamos que es completo (es decir una base ortonormal)

Bsra ver que si $f \in L^2[0,2\pi]$ es tal que $f \perp x_k\ \forall k \Rightarrow f = 0$

$f \perp x_k = 0 \Rightarrow \int_o^{2\pi} f(t)\ e^{ikt} dt = 0$

Sea $F(t) = \int_0^t f(u)\ du$

(notar que $f \in L^2[0,2\pi] \Rightarrow f \in L^1[0,2\pi]$, F es (absolutamente) continua y $F' = f$ en casi todo punto)

Notemos que $F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(u)\ du = < f,1 > = 0$

Si $c \in \mathbb{C}$ tenemos integrando por partes: (si $k \neq 0$)

$$0 = \int_o^{2\pi} (F(t)-c)\ e^{ikt}\ dt = [F(t)-c]\ \frac{e^{ikt}}{ik} \Bigg|_o^{2\pi} - \int_o^{2\pi} f(t)\ \frac{e^{ikt}}{ik}\ dt =$$

$$= \frac{1}{ik}\ [\ F(2\pi)-c-F(0+c\ ] - \int_o^{2\pi} f(t)\ \frac{e^{ikt}}{ik}\ dt = 0 \text{ por hipótesis}$$

Quiero que valga también si $k = 0 \Rightarrow \int_o^{2\pi} F(t)-c\ dt = 0 \Rightarrow$ elijo

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} F(t)\ \ dt$$

$\overline{F(t)} - \overline{c}$ es continua y vale lo mismo en 0 y en 2π (se puede extender

a una función períodica continua ,o sea $\overline{F(t)} - \overline{c}$ $C_{per}(2\pi,\mathbb{C})$

Por el corolario del teorema de Stone-Weierstrass, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{ikt}$ tal que

$|T(t) - (\overline{F}(t) - \overline{c})| < \varepsilon \;\; \forall \; t \in [0,2\pi]$

Ahora bien: $\int_0^{2\pi} (F(t)-c).T(t) \, dt = 0$ (pues T es combinación lineal de e^{ikt})

$$\int_0^{2\pi} |F(t)-c|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} (F(t)-c)(\overline{F}(t)-\overline{c}) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (F(t)-c)(\overline{F}(t)-\overline{c}) \, dt - \int_0^{2\pi} (F(t)-c).T(t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (F(t)-c)(\overline{F}(t)-\overline{c}-T(t)) \, dt$$

entonces resulta que:

$$\int_0^{2\pi} |F(t)-c|^2 \, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |F(t)-c|.|\overline{F}(t)-\overline{c}-T(t)| \, dt \leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} |F(t)-c| \, dt$$

Como vale $\forall \; \varepsilon > 0 \Rightarrow \| F - c \|_2 = 0 \Rightarrow F(t) = c$ en casi todo punto

pero F es continua $\Rightarrow F(t) = c \;\; \forall \; t \in [0,2\pi]$

Pero $F(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow F(t) = 0 \;\; \forall \; t \in [0,2\pi]$

$F' = f$ en casi todo punto $\Rightarrow f = 0$ en casi todo punto (como elemento de L^2)

Luego $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo.

Dada $f \in L^2 [0,2\pi]$ tenemos que $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} < f,x_k > x_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, e^{ikt}$

donde $c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < f,x_k > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, e^{-ikt} \, dt$ (Serie de Fourier)

(la serie converge a f en norma 2)

La igualdad de Parseval dice que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |<f,x_k>|^2 = \| f \|_2^2 \Rightarrow 2\pi \sum_{k\in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \| f \|_2^2$$

Análogamente

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; ; \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos (kt) \;\; (k \in \mathbb{N}) \; ; \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(kt) \;\; (k \in \mathbb{N}) \right\}$$

es un sistema ortonormal completo en $L^2[0,2\pi]$ real.

Por lo tanto dada $f \in L^2[0,2\pi]$ (real)

tenemos que

$$f = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt))$$

(la serie converge a f en norma 2)

donde $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \text{ si } k > 1$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt)\, dt$$

La igualdad de Parseval dice que:

$$\| f \|_2^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

<u>Aplicacion:</u>

<u>Teorema</u> <u>isoperimetrico:</u> En el plano de todas las curvas simples cerradas de longitud fija, la que mayor área encierra es el círculo

<u>Dem:</u> (la curva se supone diferenciable)

Digamos que $\gamma(s) = (x(s),y(s))$ es una parametrización por longitud de arco de una curva de longitud L con $s \in [0,L]$

Si pongo $t = \dfrac{2\pi s}{L}$ $t \in [0,2\pi]$ $\gamma(t) = (x(t),y(t))$ es una parametrización con $t = t(s)$

Desarrollamos $x(t), y(t)$ en serie de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt))$$

$$y(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos(kt) + d_k \operatorname{sen}(kt))$$

y digamos que los desarrollos de Fourier de $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ son:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \operatorname{sen}(kt))$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos(kt) + D_k \operatorname{sen}(kt))$$

Tenemos:

$$A_n = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{dt}(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left. x(t) \cos kt \right|_0^{2\pi} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(kt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\, x(2\pi) - x(0)] + n\, b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, n\, b_n$$

[$x(2\pi) = x(0)$ por ser curva cerrada] queda pues $A_n = n\, b_n$

y análogamente $B_n = -n\, a_n$ $C_n = n\, d_n$ $D_n = -n\, c_n$

(este resultado es esl que se obtendría derivando formalmente las series de $x(t)$ e $y(t)$)

Obs: Si la curva fuera un círculo de radio r $L = 2\pi r$

El área A que encierra es $A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$

así pues para un círculo $4\pi A = L^2$

vamos a ver que en general vale la desigualdad $4\pi A \leqslant L^2$,o sea $L^2 - 4\pi A \geqslant 0$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\ \frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\ \frac{ds}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right] \text{ pues } \frac{ds}{dt} = \frac{L}{2\pi}$$

pero como es una parametrización por longitud de arco:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2$$

entonces tenemos

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ds = \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_2^2 + \left\| \frac{dy}{dt} \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2) \qquad \text{(Por la igualdad de Parseval)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$$

Sea R la región del plano encerrada por γ

La fórmula de Green dice que si $P,Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces

$$\iint_R (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy$$

Tomando $Q(x,y) = x$ $P(x,y) = 0$ queda:

$$A = \text{Area}(R) = \iint_A 1\, dx\, dy = \int_\gamma x\, dy = \int_0^{2\pi} x(t) \frac{dy}{dt}\, dt = \left< x, \frac{dy}{dt} \right> =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n C_n + b_n D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, (a_n d_n - b_n c_n)$$

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2) - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, (a_n d_n - b_n c_n)$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2n\, a_n d_n + n^2\, d_n^2 + n^2 b_n^2 + 2n\, b_n\, c_n + n^2\, d_n^2)$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} [(n\, a_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2-1)\,(d_n^2 + c_n^2)] \geq 0$$

(todos los términos son no negativos: sumas de cuadrados) $\Rightarrow L^2 \geq 4\pi A$

Además vale la igualdad $\Leftrightarrow$ todos los términos son cero, o sea para cada $n\geq 1$

$n\, a_n = d_n$, $n\, b_n = -c_n$ y si $n > 1$ que: $d_n = 0$, $c_n = 0$

y por lo tanto: $a_n = 0$, $b_n =$ si $n > 1$

Sobreviven $a_1 = d_1 = a$ y $b_1 = -c_1 = b$,y queda

$$x(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (a \cos(t) + b \operatorname{sen}(t))$$

$$y(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-b \cos(t) + a \operatorname{sen}(t))$$

queda

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} a_0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \gamma$ es una circunferencia

Vimos que en general vale que $4\pi A \leq L^2$,y si vale la igualdad la curva es un círculo.

<u>Sistemas</u> <u>de</u> <u>Rademacher</u> <u>y</u> <u>Walsh</u> (En $L^2[0,1]$)

Sea $I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n} , \frac{k+1}{2^n}\right)$ $(0 \leq k \leq 2^{n-1})$

Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces definimos la n-ésima función de Rademacher $r_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ por

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_{n,k} \text{ con } k \text{ par} \\ -1 & \text{si } x \in I_{n,k} \text{ con } k \text{ impar} \end{cases}$$

$r_0(x) = 1 \ \forall\ x \in [0,1]$

(En realidad como pensamos $r_n \in L^2[0,1]$ el valor que toma en los puntos de la forma $x = \frac{k}{2^n}$ no interesa, ya que dicho conjunto tiene medida nula)

Otras formas de expresar la definición de r_n:

$r_n(t) = (-1)^{d_n}$ donde $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$ es el desarrollo en base 2 de t

o $r_n(t) = \text{sg}\ (\text{sen}\ (2\pi nt))$

<u>Proposicion:</u> las funciones de Rademacher $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ forman un sistema ortonormal en $L^2[0,1]$: $< r_n, r_k > = \int_0^1 r_n(t)\ r_k(t)\ dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k \end{cases}$

más aún vale que si tengo un producto de varias:

$$\int_0^1 r_{k_1}(t)\ r_{k_2}(t)\ \ldots\ r_{k_n}(t)\ dt = \begin{cases} 0 \text{ si alguna } r_{k_i} \text{ no se repite o se} \\ \text{un número impar de veces} \\ 1 \text{ si cada } r_{k_i} \text{ se repite un número} \\ \text{par de veces} \end{cases}$$

<u>Obs:</u> Las funciones de Rademacher <u>no</u> forman un sistema ortonormal completo

Vamos a ver que $\cos 2\pi t$ es ortogonal a todas las $r_n(t)$

$$< \cos 2\pi t, r_0 > = \int_0^{2\pi} \cos 2\pi t\ dt = \frac{1}{2\pi} \text{sen } 2\pi t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$< \cos 2\pi t, r_1 > = \int_0^{\pi} \cos 2\pi t\ dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos 2\pi t\ dt = 0$$

Si $n > 1$ y $t \in (0,1/2)$ tenemos $r_n(t + 1/2) = r_n(t)$

pues $t = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$, $t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$

y $\cos 2\pi(t+1/2) = -\cos 2\pi t$

$$< \cos 2\pi t, r_n(t) > = \int_0^1 \cos 2\pi t\ r_n(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \cos 2\pi t\ r_n(t)\ dt + \int_{1/2}^1 \cos 2\pi t\ r_n(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \cos 2\pi t\ r_n(t)\ dt + \int_0^{1/2} \cos 2\pi(t+1/2)\ r_n(t+1/2)\ dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \cos 2\pi t\ r_n(t)\ dt - \int_0^{1/2} \cos 2\pi t\ r_n(t)\ dt = 0$$

Def.: (Sistema de Walsh en $L^2[0,1]$) Como las funciones de Rademacher no forman un sistema ortonormal completo, surge la pregunta: ¿ Qué funciones agregarles para obtener un sistema ortonormal completo ?

La respuesta es el sistema de Walsh:

$w_0 = r_0$
$w_1 = r_1$
$w_2 = r_2$
$w_3 = r_1 . r_2$
$w_4 = r_3$

En general w_n de define así: se escribe $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_p}$ con $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ (en binario)

$w_n = r_{(k_1+1)} . r_{(k_2+1)} \ldots r_{(k_p+1)}$

Ej: $21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$ (es 10101 en binario)

$\Rightarrow w_{21} = r_1 . r_3 . r_5$

En particular si $r = 2^p \Rightarrow w_n = r_{p+1}$ luego las funciones de Rademacher están entre las de Walsh

Como conjunto las w_n son todos los productos de las r_n que no se repiten

Se ve que las w_n forman un sistema ortonormal usando la propiedad de las funciones de Rademacher

Proposicion: $(w_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2[0,1]$

Idea de la dem: Sea $f \in L^2[0,1]$ (podría ser L^1) tal que

$$\int_0^1 f(t)\ w_n(t)\ dt = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Quiero ver $f = 0$ (en casi todo punto)

Defino $F(t) = \int_0^t f(t)\ dt$ entonces $F(t)$ es absolutamente continua y $F' = f$ (en casi todo punto)

Vamos a ver que $F = 0$

Claramente $F(0) = 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t)\ dt = < f, r_0 > = 0$

$$0 = \int_0^1 f(t)\, w_1(t)\, dt = \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\, dt =$$

$$= F(1/2) - F(0) - [\, F(1) - F(1/2)] = 2\, F(1/2) \Rightarrow F(1/2) = 0$$

$$0 = \int_0^1 f(t)\, w_2(t)\, dt = \int_0^{1/4} f(t)\, dt - \int_{1/4}^{1/2} f(t)\, dt + \int_{1/2}^{3/4} f(t)\, dt - \int_{3/4}^{1} f(t)\, dt =$$

$$= F(1/4) - F(0) - F(1/2) + F(1/4) + F(3/4) - F(1/2) - F(1) + F(3/4) =$$

$$= 2\, [\, F(1/4) + F(3/4)\,]$$

$$w_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1/4 \\ -1 & \text{si } 1/4 < x < 3/4 \\ 1 & \text{si } 3/4 < x < 1 \end{cases}$$

$$0 = \int_0^1 f(t)\, w_3(t)\, dt = \int_0^{1/4} f(t)\, dt - \int_{1/4}^{3/4} f(t)\, dt + \int_{3/4}^{1} f(t)\, dt =$$

$$= F(1/4) - F(0) - F(3/4) + F(1/4) + F(1) - F(3/4) =$$

$$= 2\, [\, F(1/4) - F(3/4)\,]$$

de las relaciones $\begin{cases} F(1/4) + F(3/4) = 0 \\ F(1/4) - F(3/4) = 0 \end{cases}$ se obtiene $F(1/4) = F(3/4) = 0$

Siguiendo de este modo se obtiene que $F\left(\dfrac{k}{2^n}\right) = 0 \quad \forall\ k,n \in \mathbb{N}_0$

Como F es continua $F \equiv 0$ en $[0,1] \Rightarrow f = 0$ en casi todo punto

(o sea $f = 0$ como elemento de L^2)