Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2007

Práctica 8: Espectro de un operador - Cálculo funcional

1. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

   a) Si $\alpha_n \to 0$, hallar $\sigma(T)$.

   b) Hallar $\sigma(T)$ en el caso general ($(\alpha_n) \in \ell^\infty$).

2. Sean $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\overline{U})$ y $M_\varphi \in \mathcal{L}(C(\overline{U}))$ el operador de multiplicación.

   a) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea inversible.

   b) Calcular $\sigma(M_\varphi)$

   c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea compacto.

3. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$.

   a) Si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   b) Si T es inversible y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$

   c) si $A \in \mathcal{L}(E)$ es inversible, $\sigma(T) = \sigma(ATA^{-1})$.

4. Si $1 < p < \infty$, sean S y T en $\mathcal{L}(\ell^p)$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

   a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq 1\}$ y que si $|\lambda| < 1$ entonces λ es un autovalor.

   b) Calcular $\sigma(S)$

   c) Probar que S no tiene autovalores.

5. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$.

   a) $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

   b) Si A es autodjunto, entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

   c) Si A es unitario, entonces $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

6. Si $1 < p < \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

   $$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$$

   a) Probar que T no es compacto.

   b) Probar que T^2 sí es compacto.

   c) Calcular $\sigma(T)$

7. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra dado por

   $$Vf(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

   Calcular $\sigma(V)$.

8. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ el operador de multiplicación. Hallar $\sigma(M_\varphi)$ en los siguientes casos:

   a) φ continua en [0,1].

   b) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

9. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador acotado, definimos

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

   a) Probar que $e^A \in \mathcal{L}(X)$.

   b) Probar que si A y B conmutan, entoncs vale la fórmula:

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

   c) Si X es un espacio de Hilbert complejo, y si A es autoadjunto probar que e^A es autoadjunto y positivo, y que e^{iA} resulta unitario.

10. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Supongamos que $\sigma(A) = K_1 \cup K_2$, donde K_1 y K_2 son dos compactos disjuntos. Probar que el operador A se puede descomponer como $A = A_1 + A_2$ donde $\sigma(A_1) = K_1 \cup \{0\}$, $\sigma(A_2) = K_2 \cup \{0\}$ y $A_1A_2 = A_2A_1 = 0$.

11. Sea T un operador normal. Probar que

    a) $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / R(T - \lambda I) \text{ subespacio propio}\} = \sigma_p(T)$.

    b) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / T - \lambda I \text{ no es acotado inferiormente}\}$.

12. Si T compacto, autoadjunto y $f \in C(\sigma(T))$ tal que $f(0) = 0$, entonces $f(T)$ es compacto.

13. a) $T \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(T) \subset [0, +\infty) \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $T = A^*A$.

    b) T autoadjunto entonces existen $T^+, T^- \geq 0$ tales que $T = T^+ - T^-$ y $T^+T^- = T^-T^+ = 0$. Concluir que en $L(H)$ todo operador es combinación lineal de, a lo sumo, 4 operadores positivos.

    c) $T \geq 0$, $n \geq 1$ entonces existe un $A \geq 0$ tal que $A^n = T$, y $\|A\|^n = \|T\|$.

14. Sea $A \in L(H)$ autoadjunto con $\|A\| \leq 1$. Probar que existe un operador unitario U tal que $A = \frac{1}{2}(U + U^*)$. (Sugerencia: considerar la función $f(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}$). Concluir que en $L(H)$ todo operador es combinación lineal de, a lo sumo, 4 operadores unitarios.