

## Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2008

### OPERADORES ACOTADOS- ADJUNTO

### PRINCIPIO DE ACOTACIÓN UNIFORME, TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA, TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO

1. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados,  $T : E \rightarrow F$  lineal. Son equivalentes:

(i)  $T$  es continuo.

(ii)  $T$  es continuo en 0.

(iii)  $T$  es acotado (i.e.  $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$ )

2. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados,  $T : E \rightarrow F$  lineal. Entonces

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

$$y \quad \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

3. Sea  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  una matriz simétrica. Considerar a  $A$  como un operador lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , utilizando en  $\mathbb{R}^n$  la norma euclídea. Probar que  $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}$ .

4. **Operadores Shift:** Sean  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$ ,  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

a) Probar que  $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$  y es inyectivo. Calcular  $\|S\|$ .

b) Probar que  $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$  y es suryectivo. Calcular  $\|T\|$ .

c)  $TS = I$ ,  $ST \neq I$ .

5. **Operadores de Multiplicación:**

a) Si  $\varphi \in C[0, 1]$ , sea  $M_\varphi : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

Probar que  $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0, 1])$  y calcular su norma.

b) Si  $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ , probar que  $M_\varphi$ , es un operador acotado de  $L^p[0, 1]$  en  $L^p[0, 1]$  y calcular su norma.

6. **Operadores integrales:** Si  $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ , sea  $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  dado por

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

Probar que  $K \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$  y que  $\|K\| \leq \|k\|_2$

7. **Operadores de Convolución** Sea  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y definamos

$$C_g(f) = f * g$$

entonces  $C_g \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n))$  y  $\|C_g\| = \|g\|_{L^1}$ .

8. Sea  $\alpha = (\alpha_n)_n$  una sucesión de números complejos,  $1 \leq p < \infty$ , definimos  $M_\alpha : \ell^p \rightarrow \ell^p$  por  $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$ . Probar:

a)  $M_\alpha$  está bien definida  $\Leftrightarrow \alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$

b)  $M_\alpha$  es inyectiva  $\Leftrightarrow \alpha_n \neq 0 \forall n$

c)  $M_\alpha$  es un isomorfismo  $\Leftrightarrow (\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$

d)  $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$

9. Si  $T, S, T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ , entonces  $(TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$  y  $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$ .

10. Sea  $E$  un espacio de Banach, sean  $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{L}(E)$ .

(i)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

(ii) Si  $A_n \rightarrow A$  y  $B_n \rightarrow B$  entonces  $A_n B_n \rightarrow AB$

11. Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $A \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\|A\| < 1$ . Probar que  $(I + A)$  es inversible,  $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$  y que su inversa viene dada por

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en  $\mathcal{L}(X)$ . Probar también que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

12. (i) Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $T, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ . Probar que si  $S \in \mathcal{L}(X)$  y  $\|S - T\| \leq 1/\|T^{-1}\|$ , entonces  $S$  es inversible,  $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ , y

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\| \|T^{-1}\|}.$$

(ii)  $\{T \in \mathcal{L}(X), T \text{ inversible}\}$  es abierto en  $\mathcal{L}(X)$ .

13. Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach y sean  $x_n, x \in E$ ,  $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F) \forall n \in \mathbb{N}$ . Si  $x_n \rightarrow x$  y  $A_n \rightarrow A$  entonces  $A_n x_n \rightarrow Ax$

14. Sea  $E$  un espacio de Banach, sea  $P : E \rightarrow E$  lineal tal que  $P^2 = P$ , sean  $S = \ker(P)$ ,  $T = R(P)$ . Probar que  $P \in \mathcal{L}(E)$  si y sólo si  $S$  y  $T$  son cerrados.

15. Un subespacio cerrado  $S$  está complementado si y sólo si existe una proyección  $P$  de rango  $S$  (una proyección es un operador tal que  $P^2 = P$ ).

16. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $A_n \in \mathcal{L}(E)$  inversibles,  $A \in \mathcal{L}(E)$  no inversible tales que  $A_n \rightarrow A$ , entonces  $\|A_n^{-1}\| \rightarrow \infty$ .

17. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio de dimensión finita, entonces  $\exists Q \in \mathcal{L}(E) / Q^2 = Q, R(Q) = S$ .
18. Sea  $E$  el espacio de Banach real  $L^1((1, +\infty))$ , sea  $T : E \rightarrow E$  dado por  $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$ . Probar que  $T$  es acotado pero no abierto.  
(Sug:  $0 \in T(B(0, 1))$  no es punto interior)
19. (i) Si  $1 \leq p < \infty$ ,  $S$  y  $T$  son los shifts definidos en el ejercicio 4, calcular  $S^*$  y  $T^*$ .  
(ii) Si  $J : \ell^2 \rightarrow c_0$ ,  $J(x) = x$ , probar que  $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$  y calcular  $J^*$ .
20. Caracterizar  $M_\varphi^*$ , siendo  $M_\varphi$  los operadores de multiplicación por  $\varphi$  definidos en el ejercicio 5. (Tener en cuenta las caracterizaciones del dual de  $C([0, 1])$  y  $L^p$ )
21. Sea  $E$  un espacio vectorial normado, sean  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  entonces  $(AB)^* = B^*A^*$ .
22. Sean  $E, F$  espacios de Banach,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .

a)  $\|A\| = \|A^*\|$

b) Si  $A$  es inversible entonces  $A^*$  es inversible y  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

c) La aplicación  $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$  dada por  $\Phi(A) = A^*$  es continua.

23. Sean  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$  dos conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$ . Se definen los operadores

$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^p(\Omega), \quad e : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\tilde{\Omega}),$$

dados por  $\rho(u) = u|_\Omega$  y  $e(u)(t) = u(t)$  si  $t \in \Omega$  y 0 en otro caso. Probar que  $\rho$  y  $e$  son acotados, calcular sus normas y calcular  $\rho^*, e^*$ .

24. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $F$  un subespacio de  $E$ ,  $S$  un subespacio de  $E^*$ . Probar que:

a) (i)  $F^\perp = \{\gamma \in E^* : \gamma(x) = 0 \forall x \in F\}$  es un subespacio cerrado de  $E^*$ .

(ii)  ${}^\perp S = \{x \in E : \gamma(x) = 0 \forall \gamma \in S\}$  es un subespacio cerrado de  $E$ .

(iii)  ${}^\perp(F^\perp) = \overline{F}$

(iv)  $({}^\perp S)^\perp \supset \overline{S}$

b) Sea  $c_{00}$  el subespacio de  $\ell_\infty = (\ell_1)^*$  de sucesiones finitas. Probar que  $({}^\perp c_{00})^\perp$  contiene estrictamente a  $\overline{c_{00}}$

25. Sean  $E, F$  espacios de Banach,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . Probar que:

a)  $R(A)^\perp = \ker(A^*)$

b)  ${}^\perp R(A^*) = \ker(A)$

c)  $\overline{R(A)} = {}^\perp \ker(A^*)$

d)  $R(A^*) \subseteq (\ker(A))^\perp$

26. Sean  $E, F$  espacios vectoriales normados,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $x \in E$ , entonces

$$\text{dist}(x, \ker(T)) = \text{máx}\{|\varphi(x)| : \varphi \in (\ker(T))^\perp, \|\varphi\| \leq 1\}$$

27. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $F \subset E$  un subespacio y  $\Phi : E^* \rightarrow F^*$  dada por  $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$ . Probar que  $\Phi \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$ ,  $\Phi$  es suryectiva y calcular  $\ker(\Phi)$ .
28. Si  $E$  y  $F$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  entonces  $\widehat{T} : E/\ker(T) \rightarrow F$ , dado por  $\widehat{T}([x]) = T(x)$ , es lineal, continuo y  $\|\widehat{T}\| = \|T\|$ .
29. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S \subset E$  un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)^* \stackrel{1}{=} S^\perp$$

$$E^*/S^\perp \stackrel{1}{=} S^*$$

30. Si  $E$  y  $F$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  con  $R(T)$  cerrado, entonces  $R(T^*)$  es cerrado y

$$R(T^*) = (\ker(T))^\perp$$

DEFINICIÓN: Sea  $E$  un espacio de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E)$  se dice acotado inferiormente si y sólo si  $\exists c > 0 / \|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in E$ .

31. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Probar que:

- a) Si  $T$  es acotado inferiormente entonces  $R(T)$  es cerrado.  
 b)  $T$  acotado inferiormente y suryectivo si y sólo si  $T$  inversible.

32. Sea  $V : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  el operador de Volterra, dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- a) Probar que  $V$  no es acotado inferiormente.  
 b) Caracterizar  $V^*$ .

DEFINICIÓN: Sea  $E, F$  dos espacios de Banach,  $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Decimos que  $T_n$  converge fuertemente a  $T$  si para cualquier  $x \in E$  se tiene que  $T_n(x) \rightarrow T(x)$ .

33. Si  $T_n$  tiende fuertemente a  $T$  y  $x_n$  tiende a  $x$  entonces  $T_n(x_n) \rightarrow T(x)$ .
34. Si  $T_n$  tiende a  $T$  fuertemente y  $S_n$  tiende a  $S$  fuertemente, entonces  $T_n S_n$  tiende a  $TS$  fuertemente.
35. Sean  $E, F$  dos espacios de Banach. Sean  $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$  tales que  $A_n(x)$  es de Cauchy para todo  $x \in E$ . Probar que existe un  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  tal que  $A_n \rightarrow A$  fuertemente.
36. En el espacio  $\ell^2$  se definen las siguientes sucesiones operadores

$$A_n x = (x_1/n, \dots, x_k/n, \dots)$$

$$B_n x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

Decidir en cada caso si la sucesión tiende a cero en norma o fuertemente.

37. Sea  $X$  un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ . Si  $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$  implica que  $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$ , entonces las normas son equivalentes.
38. Sea  $S \subset E$  un subespacio complementado de codimensión infinita. Probar que existe  $T : E \rightarrow E$  lineal no acotada tal que  $\ker(T) = S$ . En particular, para operadores no vale:  $\ker(T)$  cerrado  $\Rightarrow T$  continuo.

Sugerencia: tomar un funcional no continuo en el complementado de  $S$ .

DEFINICIÓN: Sea  $E, F$  dos espacios de Banach,  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  un operador lineal no acotado (donde  $D(T)$  denota el dominio de  $T$ ). Decimos que  $T$  es cerrado si  $x_n \in D(T)$ ,  $x_n \rightarrow x$  y  $T(x_n) \rightarrow y$ , implican que  $x \in D(T)$  y  $T(x) = y$ .

39. a)  $T$  es cerrado si y sólo si  $G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}$  es cerrado en  $E \times F$ .
- b)  $T$  es cerrado si y sólo si  $D(T)$  resulta un espacio de Banach con la norma  $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ .
- c) Si  $T$  es cerrado y  $D(T)$  es cerrado, entonces  $T \in \mathcal{L}(D(T), F)$ .
- d) Probar que el operador  $T : D(T) = C^1[0, 1] \subset C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dado por  $T(x) = x'$  es cerrado.