Análisis I para biólogos

Ejercicios adicionales para el primer parcial

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \tan \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+3}{2x-1}(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3[\dfrac{1}{4x^3+x}]^{\operatorname{sen}^2 x}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{3x^4+3}-\sqrt{2x^4+5})$

f) $\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{1}{x^2+3x})^{\operatorname{sen}^2 x}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{4x^4+1}-\sqrt{x^4+2})$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x^2-1}}{x^3-2x^2+x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(\sqrt{\dfrac{x^2-x+2}{2-x}})$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x-1}{x+1})^x$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^4+2}-\sqrt{x^4+3})$

2. Analizar si los siguientes límites son iguales o no

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

3. Sea $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$; $g(x) = f(x+1)$. Calcule $(f \circ g)(-3)$ y $(g \circ f)(-3)$.

4. Sean $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$; $g(x) = 3\ln(x)$.

   Determine el dominio de las funciones y calcule el valor de $(g \circ f)(\frac{1}{2})$.

5. Calcule el dominio, el conjunto de ceros, el conjunto positividad y el de negatividad de la función $g(x) = \sqrt{\ln(x+2)+3}$.

6. El gráfico de $f(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$ corta al eje de las x en el punto $(2;0)$. Determine el conjunto de ceros de $f(x)$, los intervalos de positividad y de negatividad.

7. Dada la función $f(x) = \ln|3x+2|$ determine su dominio,el conjunto de sus raíces y los de positividad y negatividad.

8. Determine el dominio, el conjunto de positividad, el conjunto de negatividad y el conjunto de raíces de la función $f(x) = \ln|2x+1|$.

9. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x > 3 \\ (x-3)^2+1 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

Estudie su dominio y su imagen. Analice si la función es biyectiva.

10. Encontrar, si existen, $a, b \in \mathbb{R}$ tales que f sea continua en $\mathbb{R}$, ¿son únicos ?

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2-4} & \text{si} \quad x > 2 \\ a & \text{si} \quad x = 2 \\ e^{\left(\frac{1}{x-2}+b\right)} & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax+3b} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2ax)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+5a & \text{si } x > 25 \\ 30 & \text{si } x = 25 \\ ax+b & \text{si } x < 25 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{3x}+2x & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{2bx}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+6}{e^{\frac{1}{x}}}+3 & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & \text{si } x < -1 \\ k(x+1)^2-2x+k & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{4x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{4x}+x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{9+bx}-1}{b} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - e^{x+3}$.

   a) Restrinja, si es necesario, el dominio y/o la imagen de f de manera tal que f resulte biyectiva. Halle explícitamente su inversa (halle su fórmula).

   b) Realice un gráfico de la inversa de f.

12. Sea $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \\ \\ -x+3 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

   Estudie el dominio, la imagen y la inyectividad. ¿Es sobreyectiva o biyectiva?

13. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x} + (\sqrt{x+2})^{-1}$

14. Estudiar la continuidad en $x = -1, 0, 1$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \\ \dfrac{8x^3 - 3x + 5}{x^2 - 1} & \text{si } x \leq 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \\ -2 & \text{si } x = 1 \\ \\ 4 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x-4)}{3x} + 2x & \text{si } x > 2 \\ \\ |x-2| + 2 & \text{si } 2 \geq x \geq -2 \\ \\ x + 3 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

   Determine y clasifique sus discontinuidades.

16. a) Determine el dominio de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2x+4)}{(x+2)^2} & \text{si } x < -2 \\ \\ x-2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-5x+4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Estudie la continuidad de esta función.

17. Halle $a \in \mathbb{R}$ tal que la recta tangente a $f(x) = e^{x^2+x(a^2-3a+5)}$ en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = 3x + 2$. Para los valores de a determinados encuentre dicha recta tangente en $x = 0$.

18. Dada la función

$$f(x) = \frac{\ln(3x^2+5x+1)}{3x^4+1} - e^{6x}\sqrt{4x^2+1}$$

a) Hallar $f'(x)$

b) Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

19. Probar que la siguiente ecuación tiene alguna solución:

$$x\cos(\frac{x}{2}) + 15\sin(x) = 15$$

¿Qué resultado está usando?¿En qué intervalo se encuentra la solución?

20. Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -(x-1)^2+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) Calcule $f'(x)$ para $x \neq -1$

b) Estudiar la diferenciabilidad en $x = -1$.

21. Sea $f(x) = \ln(x-1) + ax^2 + \sqrt{x+7}$. Determine a tal que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(2; f(2))$ tenga pendiente $\frac{-1}{6}$

22. Dada $f(x) = \ln(x^2-3)$

a) Hallar su dominio.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 2$.

23. Sea $f(x) = 3^{x^2-x+a}$. Determine, si existe, algún valor de a para el cual la recta normal al gráfico de f en $x = 1$ tenga pendiente $\frac{-27}{\ln 3}$. En caso afirmativo, halle la ecuación de dicha recta normal.

24. Sea $f(x) = (x^4 + 1)^x + [\cos^2(\mathrm{sen}(x))]^3$.

    a) Calcule $f'(x)$.

    b) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

25. Dada la función $f(x) = (x^2+4)^{\cos(-4x)}$ determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de esta función en $x = 0$.

26. Sea $g(x) = [\ln(x+1)]^{ax}$. Determinar el valor de a para que la recta tangente al gráfico de g en $x = e - 1$, sea paralela a la recta $y = x$.

27. ¿Es posible aplicar el teorema de Lagrange a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ \\ \frac{-1}{4}x + 1 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

    en el intervalo $[1, 4]$?

28. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ \\ \dfrac{2}{|x|} & \text{si } -1 \ge x \text{ ó } x \ge 1 \\ \\ x + 3 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

    Estudiar la derivabilidad de f y hallar f' donde sea posible.

29. Determinar el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ en dicho punto sea paralela a $y = 24x$

30. Calcule la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\ln x(\mathrm{sen}(\alpha))}{1 - x\cos(\alpha)}\right).$$

31. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   a) Analice cada una de las hipótesis del Teorema de Rolle en los intervalos $[-1; 1]$ y $[-1; 2]$.

   b) Decida, en cada uno de los casos anteriores, si el teorema se puede aplicar.

   c) Si la respuesta es afirmativa, determine c en el intervalo correspondiente tal que se verifique $f'(c) = 0$.

32. Planteamos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq 4 \\ \\ \dfrac{1}{x-3} + 3 & \text{si } 4 < x < 6 \\ \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

   Calcule $h'(x)$ para $x \neq 4, x \neq 6$. Analice la derivabilidad en $x = 4$ y en $x = 6$.

33. Sea $f(x) = 4x^3$ y sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h'(4) = 7$. Calcule $(h \circ f)'(1)$

34. Una sustancia radioactiva se desintegra según la ley $f(t) = ke^{0{,}02t}$. Donde t se expresa en años. ¿Después de cuántos años la masa inicial k quedará reducida a un tercio?

35. Sea $f(x) = ka^{x-1}$ que verifica $f(5) = 16$ y $f(7) = 4$. Calcule $f(6)$.

36. Sea $f(x) = ka^{x-1}$. Determine las constantes a y k tales que se verifique $f(-1) = 0,1$ y $f(3) = 8,1$.

37. Dada la función exponencial $f(x) = ka^{x-1}$ determine los valores de $k \in \mathbb{R}, a > 0$ tales que $f(-1) = 0,7$; $f(4) = 22,4$.

38. En un cultivo de laboratorio tenemos una población inicial de 2000 colonias de bacterias a las que sometemos a la acción de un bactericida diluido. Las colonias disminuyen en un 7 % (o sea 0,07) por hora. Determine analíticamente la función exponencial que rige este proceso.

39. En un hábitat adecuado se determinó que en 1990 la población de monos fue de 8600, mientras que en 1995 alcanzó los 21000 ejemplares. Asumiendo que el crecimiento de población sigue una ley exponencial de la forma $f(t) = K.a^t$:

a) Determine los parámetros e indicar la función.

b) ¿En qué año la población fue aproximadamente de 6000 monos?

c) ¿ Cuántos ejemplares habrá en el año 2001 ?