ANÁLISIS 1 BIOLOGÍA – Ejercicios Adicionales

(**1**) Sea f la función definida como $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

- Hallar el dominio de f.
- Calcular las curvas de nivel 0, 1 y -1 de f.
- Determinar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(**2**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$, las funciones $f(x, ax)$ y $f(ay, y)$ son continuas en 0 pero que f no es continua en $(0,0)$.

(**3**) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones definidas en cada item. Para cada una de ellas estudiar la continuidad en cada punto, y decidir si las discontinuidades son evitables o no.

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2(x+2)^2 + (y-1)^2\right)}{6(x+2)^2 + 3(y-1)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (-2,1) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (-2,1). \end{cases}$
- $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.
- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy + |x| + |y|}{|x| + |y|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(**4**) Para la función f siguiente, hallar si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que f resulte contínua en todo $\mathbb{R}^2$ (justificar adecuadamente la continuidad en cada punto de $\mathbb{R}^2$):

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi xy}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\right) + \dfrac{x\,(y-2)^3 \sin\left(\dfrac{\pi}{(x-2)^2 + |y-2|}\right)}{(x-2)^2 + (y-2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (2,2) \text{ y } (x,y) \neq (0,0) \\ 2\alpha + 1 & \text{si} \quad (x,y) = (2,2) \\ \beta - 3 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(**5**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función del primer item del ejercicio (3). Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ para todo $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, y calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.