Análisis Matemático I (Biólogos)

Primer cuatrimestre – 2006

Práctica 3: Límites y continuidad.

1. Usando las propiedades básicas de los límites funcionales calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado :

   a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)\sqrt{3x-1}$

   b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)$

   d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{2x+5}}{x+2}$

   e) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^3-b^3}{x-b}$

   f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

   g) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

   h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+5}}$

   i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

   j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$ con $t\in\mathbb{R}$, t fijo

   k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x+\tan\ x}{\cos\frac{2x}{3}}$

   l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+9x+2}{x^2-4}$

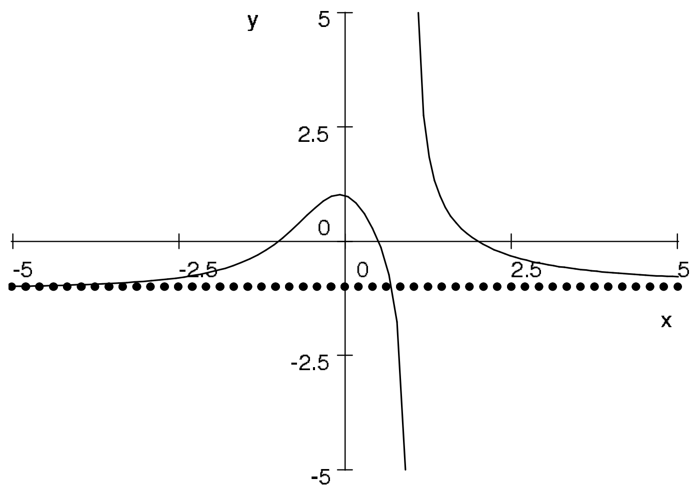
   m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{4x+1}-3}$

2. *a*) Hacer un gráfico aproximado de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

   b) Verificar gráficamente que vale $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

   c) Para cada $n\in\mathbb{N}$ calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$

3. Consideremos una función $f(x)$ cuyo gráfico es:



a) Determinar el dominio de esta función y sus limites en los extremos del conjunto dominio.

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -1$?

c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$?

d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = m$, donde m es un determinado número real? Considerar todas las posibilidades.

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7 - \sqrt{3}^{10}}{x} + 9x^7$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln\ x - 2\ln(x+1))$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+1} - x}{x + 5}$

5. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa m cuando se mueve a la velocidad v tiene masa dada por la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{c}}}$ donde c es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede cuando $v \to c$?

6. Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar el número de peces maduros (llamados reclutas) que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si R es el número de reclutas y H el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que $R = R(H) = \dfrac{H}{\alpha H + \beta}$ donde α y β son constantes positivas. Demostrar que, de acuerdo con esta función, para un número H de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

7. Hemos visto en la práctica anterior que las poblaciones biológicas comienzan creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del habitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{l}{1 + ke^{-at}}$$

donde l, k y a son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo t.

a) ¿Cuál es la población inicial en este modelo?

b) ¿Cuál es la población límite? (Calcular el límite de $f(t)$ cuando $t \to \infty$.)

c) Si l y k fueran números grandes (respecto de los valores de t) la función $f(t)$ es próxima a la función exponencial $g(t) = \dfrac{l}{1+k}\, e^{at}$, concordando con lo que afirmamos al comienzo. Supongamos que una población de moscas tiene los parámetros :

$$l = 10 \qquad k = 999 \qquad a = 0,02$$

Verificar mediante una tabla de valores que la logística y la exponencial son muy similares para $t < 100$. Ambas funciones seguirán siendo próximas si vale $100 < t < 200$ ¿Qué ocurre para $t > 200$?

8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2} \cos(x + \dfrac{1}{x})$

c) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4)\sin(\dfrac{1}{x-2})$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\,(h(x))$, con $h(x)$ cualquier función

e) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cos[\ln(1 + \dfrac{1}{x})]$

9. Sabiendo que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$

d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

10. Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^3}$

a) Determinar el dominio de f.

b) ¿Se puede calcular directamente $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? ¿Por qué?

c) Determinar la función g definida por $g(h) = f(1+h)$.

d) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Deducir $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

e) ¿Admite $f(x)$ asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

11. Determinar los números reales a y b para que se verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 2$$

a) Comprobar gráficamente que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b) ¿Qué puede decir de $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}$ y de $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n}$ para n par?

c) La misma pregunta para n impar.

12. Calcular los siguientes límites y representar geométricamente :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 2^+} |3x-6| \qquad \lim_{x\to 2^-} |3x-6| \qquad \lim_{x\to 2} |3x-6|$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$

siendo $f(x) = \begin{cases} -x+5, & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

13. Calcular los siguientes limites :

a) $\lim_{x\to 3} (3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$

b) $\lim_{x\to\infty} (\frac{3x+1}{2x-5})^{\frac{x+1}{3x+1}}$

c) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{\sin(2x)}{\sin x})^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to 0} (\frac{\sin 2x}{x})^{\frac{\tan\ x}{3x}}$

e) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x})^{x+1}$

f) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{\sin x}{\sin 2x})^{\frac{1}{x}}$

14. Sabiendo que $\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{t\to\infty} (1+\frac{1}{t})^t = e$

a) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{x-2}{x+3})^x$

b) $\lim_{h\to 0} (1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$

c) $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln\ a}{h}$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$

e) $\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{a}{x})^x$

f) $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin\ x)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

h) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha+h}-e^{\alpha}}{h}$

15. Calcular los siguientes limites :

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin(\frac{x}{2})}{\pi - x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin^2 x}{x+\sin 2x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

16. Dadas las constantes arbitrarías a y b, demostrar que $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2})^t$ es independiente de la elección de b.

17. Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ en $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 2$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3-4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ en $x = 2$

h) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

18. Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad (en $\mathbb{R}$) de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas :

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-4}{2x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}-2}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

e) $f(x) = \begin{cases} 4x^2-3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

19. Determinar a y b de manera que cada una de las siguientes funciones sea continua.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ ax+b & \text{si } x \in (0,2) \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2+b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ ax+b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$

20. En cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$. Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para hacerla continua.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

21. Analizar la continuidad en $x_0 = 5$ de la función así definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \dfrac{45\,\text{sen}(x-5)\ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

¿ Qué se puede decir de la continuidad de f en $\mathbb{R} - \{5\}$?

22. ¿Cómo debe elegirse la constante A en la definición de la siguiente función, si queremos que la función f resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

23. Demostrar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + 1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-1;0)$.

24. Demostrar que los gráficos de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 2$ se cortan para algún $x_0 \geq 0$.

25. Demostrar la existencia de $x_0 \in (1, e)$ tal que $\dfrac{\ln x_0}{x_0} = \dfrac{1}{3}$.

26. Determinar la existencia de raíces reales de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{4-x^2}$ en los intervalos $[-4;-3]$, $[-3;3]$ y $[-1;1]$.

27. Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra \$ 1,10 por kg en compras de menos de 8 kg, mientras que cobra \$ 1 por kg si se compra 8 kg o más.

a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

b) ¿$C(x)$ es continua? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.

c) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre $7,5\,\text{kg}$ de este producto.

28. La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a $\$\ 1,20$ por kg los primeros $5\,\text{kg}$, y para compras mayores a $5\,\text{kg}$ cobra $\$\ 6$ más $\$\ 0,90$ por cada kilo que sobrepase los 5.

    a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

    b) ¿$C(x)$ es continua? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.