Análisis Matemático I (Biólogos)

Primer Cuatrimestre – 2006

Práctica 5: Aplicaciones de la derivación

1. Decida si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en los intervalos indicados en cada caso. Si la respuesta fuera afirmativa, determine c en el correspondiente intervalo abierto, tal que $f'(c) = 0$:

   a) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0;4]$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $[0;2]$

   c) $f(x) = |x|$ en $[-1;1]$

   d) $f(x) = x^2 + 3$ en $[-1;2]$

   e) La misma función que en item anterior pero considerada en el intervalo $[-1;1]$

2. Consideramos la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2;1] \\ 3x-2 & \text{si } x \in (1;2] \end{cases}$$

   a) Verifique que $f(x)$ es continua en $[-2;2]$, y que $f(-2) = f(2)$.

   b) Compruebe que f no es derivable en $x_0 = 1$.

   c) Verifique que $f'(0) = 0$.

   d) ¿Surge de las anteriores comprobaciones una contradicción al Teorema de Rolle?

3. Dada la función $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ demuestre que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.

4. La temperatura (medida en grados centígrados) de un pequeño animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo con la siguiente ley $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t el tiempo medido en horas.

   a) Sin derivar $T(t)$, demuestre que en algún instante del lapso $[0;4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

   b) Determine $t_0 \in (0;4)$ tal que $T'(t_0) = 0$.

5. Decida si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Lagrange en los intervalos indicados en cada caso. Si la respuesta fuera afirmativa determine c perteneciente al intervalo abierto tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

a) $f(x) = 2x^3 - 6x$ en $[-2;2]$

b) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0;5]$

c) $f(x) = (x-1)^2$ en $[0;3]$

d) La misma función en $[3;5]$

6. En un modelo económico supongamos que el costo de producción de x artículos está dado por $C(x) = 200x - x^2$, si el número de artículos a producir varia entre 0 y 100. Determine un valor de $x \in (0;100)$ tal que el costo marginal, es decir, $C'(x)$ sea equivalente al costo promedio (el costo de cada artículo) al producir 100 artículos.

7. Demuestre, aplicando el Teorema de Lagrange, que $\forall\ x > 0$ vale $\ln(1+x) < x$.

8. Dada $f(x) = x^{11} + x^9 + 2x^3 + 2x + 5$, calcule $(f^{-1})'(5)$.

9. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones

   a) $f(x) = \arcsin x$

   b) $f(x) = \arccos x$

   c) $f(x) = \arctan x$

   d) $f(x) = \mathrm{arcctg} x$

   e) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$

   f) $f(x) = \ln(\arccos x)$

10. Calcule los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hospital, siempre que ello sea posible :

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \sin x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin x)}{\pi - 2x}$

   e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{tg}\ x}{\mathrm{tg}\ 5x}$

   f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln \dfrac{1}{x}$

   g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

   h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\ x}{x^4}$

   i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{4x^5}$

   j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\ x}{e^x}$

   k) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos\ x}{\sin\ x})$

   l) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln\ x})$

   m) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\mathrm{ctg}\ x}$

   n) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin\ x}$

   ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos\ x}{x}$

   o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$

   p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\ x - \sin\ x}{x - \sin\ x}$

   q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\ x - \sin\ x}{\sin^2 x}$

   r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\ x}{ctgx}$

   s) $\lim\limits_{x\to 0} (x - \sin\ x) \ln\ x$

   t) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

   u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

   v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + \ln\ x}{x \ln\ x}$

   w) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{4x^5}$

   x) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{ctg}\ x - \dfrac{1}{x})$

$y)$ $\lim_{x\to 0} x^x$

(α) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x})^{\sin\ x}$

(β) $\lim_{x\to +\infty} (\ln\ x)^{\frac{1}{1-\ln\ x}}$

11. ¿Es aplicable la Regla de L'Hóspital para calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\ (\frac{1}{x})}{\sin\ x}$$

Si la repuesta fuera afirmativa, aplique la Regla y calcule el límite. Si la respuesta fuera negativa, explique por qué no se puede aplicar la Regla.

12. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-4}, & \text{si } x \leq 4 \\ \dfrac{20\sin(x-4)\ln(\frac{3}{4}x-2)}{x-4} + 12, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

   a) Estudie la derivabilidad de f en $\mathbb{R}_{\neq 4}$.

   b) Analice la derivabilidad de f en $x = 4$ mediante el estudio de los correspondientes cocientes incrementales.

13. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x(\frac{1}{3x^2+2x})^{\sin\ x}, & \text{si } x > 0 \\ x-1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

   a) Estudie la derivabilidad de f en $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

   b) Analice la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante el estudio de los correspondientes cocientes incrementales.

14. Calcule (si es posible) $f'(0)$ para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{\sqrt[3]{x}+\cos(x-1)}}{\sin\ x + \ln(x^2+e)} + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ (\cos\ x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(x^2+\sqrt[3]{x})}{\sin\ x + e^{\cos\ x}} & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\sin^2 x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

15. Determine todos los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x + 1$ en $[-1; 3]$

   b) $f(x) = \sin(2x)$ en $[0; \pi]$

   c) $f(x) = |x-2|$ en $[-1; 1]$

16. Decida si x_0 es un extremo local de f en cada caso:

   a) $f(x) = x^2 + 1$ $x_0 = 0$

   b) $f(x) = |x-2|$ $x_0 = 2$

   c) $f(x) = x^6 + 5$ $x_0 = 0$

   d) $f(x) = x^4$ $x_0 = 0$

17. Determine todos los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{1-x} \quad (0 \neq x \neq 1)$

d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

e) $f(x) = x \ln\, x \quad (x > 0)$

f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$

h) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$

18. Determine y clasifique los extremos locales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto y que además cumple con las siguientes condiciones:

a) $f'(-1) = f'(-\frac{1}{2}) = f'(0) = f'(\frac{3}{2}) = 0$.

b) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty; -1) \cup (0; \frac{3}{2})$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = (-1; \frac{-1}{2}) \cup (\frac{-1}{2}; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

A partir de todos estos datos determinar la totalidad de los máximos y mínimos locales de la función f. Justifique sus afirmaciones. Dibuje una función que cumpla con estas condiciones.

20. En cada una de las siguientes funciones estudie el dominio; las posibles asíntotas; los máximos y mínimos locales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento; el sentido de la curvatura; los puntos de inflexión. Sobre la base de todos estos datos, realice un gráfico aproximado de f:

a) $f(x) = 12x^2(x+1)$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x}$

d) $f(x) = x^{\frac{2}{3}(1-x)}$ en $[-1; 1]$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

h) $f(x) = e^{-x^2}$

i) $f(x) = x \ln\, x$

j) $f(x) = xe^{-x}$

k) $f(x) = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

l) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ xe^{-x} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

m) $f(x) = e^x(x^2+2)$

n) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

ñ) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3}$

o) $f(x) = e^x(x^2+2)$

p) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3}$

q) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

r) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}$

s) $f(x) = xe^x$

t) $f(x) = x^2 + |x|$

u) $f(x) = x - \ln\ x$

v) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

21. La función $f(t) = \dfrac{t}{20t^2+50t+80}$ (definida para $t \geq 0$) expresa la concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis. Analizar las variaciones de dicha concentración con el paso del tiempo.

22. La densidad del agua a 0^{o}C es de $1\,\mathrm{g/cm}^3$ pero varía levemente al variar la temperatura de acuerdo con la expresión:

$$S(t) = 1 + 5,3 \cdot 10^{-5}t - 6,53 \cdot 10^{-6}t^2 + 1,4 \cdot 10^{-8}t^3$$

donde $0 \leq t < 100$ que mide la temperatura en grados centígrados, y $S(t)$ es la densidad o peso específico del agua a la temperatura t. Sobre la base de dicha expresión, analizar el crecimiento y decrecimiento de la densidad en función de la temperatura del agua.

23. *a*) Demuestre que una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (con $a \neq 0$) puede tener a lo sumo dos extremos relativos.

    b) Formule un ejemplo de tal función con dos extremos relativos.

    c) Formule un ejemplo de tal función sin extremos relativos.

    d) ¿Puede una tal función tener un único extremo relativo? ¿Por qué?

24. Exprese el número 16 como suma de dos números cuyo producto sea máximo.

25. Determine dos números cuya suma sea 12 y cuyo producto sea máximo.

26. De una pieza rectangular de cartón de $25\,\mathrm{cm}$ de largo y $10\,\mathrm{cm}$ de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?

27. Un rectángulo está inscripto en un semicírculo de radio (es decir que sus cuatro vértices están en el perímetro del semicírculo). Calcule las dimensiones del rectángulo que hacen máxima su área.

28. Si hacemos girar en el espacio un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, engendrará en su rotación un cono circular recto. ¿Cuál será el mayor volumen V de un cono engendrado de esta manera por un triángulo cuya hipotenusa mide $6\,\mathrm{cm}$?

29. Entre todos los rectángulos de área A determine

    a) Aquél que tiene perímetro mínimo.

b) Aquél que tiene la diagonal más corta.

30. Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$ determine cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.

31. Se desea construir una caja de base cuadrada con tapa, y que tenga $1\,\mathrm{dm}^3$ de capacidad. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de dicha caja para que la cantidad de material utilizado en su confección sea mínima?

32. ¿Cuándo es mínima la suma de un número x más el cuadrado de su recíproco?

33. El espacio recorrido por un móvil hasta el instante t se expresa por la función

$$f(t) = 3\cos(2t + \frac{\pi}{4})$$

a) Grafique la función f.

b) Determine la velocidad instantánea en el instante t. Grafique dicha velocidad.

c) ¿Para cuáles valores de t dicha velocidad es máxima en valor absoluto?

34. Se realizaron 10 mediciones de una magnitud física y se obtuvieron los valores

$$2 \qquad 1,9 \qquad 2,2 \qquad 2,3 \qquad 2 \qquad 1,8 \qquad 1,9 \qquad 2,1 \qquad 2 \qquad 1,8$$

Para cada valor x atribuido a dicha magnitud llamaremos $S(x)$ a la suma de los cuadrados de los errores cometidos por dichas mediciones, es decir:

$$S(x) = (x-2)^2 + (x-1,9)^2 + (x-2,2)^2 + \cdots$$

Verifique que $S(x)$ es mínima cuando x es el promedio de las mediciones obtenidas.

35. La siguiente función describe (en millones de habitantes) la población de un país como función del tiempo t medido en años $(1950 \leq t \leq 2000)$.

$$P(t) = \frac{80}{1 + 3e^{-\frac{t-1950}{10}}}$$

a) Determinar la tasa instantánea de crecimiento de P en el año t.

b) ¿En qué momento P tuvo la máxima tasa instantánea de crecimiento?

36. Los alumnos de un colegio deciden contratar un servicio de transporte para una excursión turística. La empresa ofrece servicio hasta para 100 personas, pero con un mínimo de 40 pasajeros. El precio del servicio (por pasajero) será de $\$15$ sí viajan precisamente 40 personas, pero se ofrece bajar el precio individual en $\$0,10$ por cada cliente que exceda los 40 pasajeros (por ejemplo, si viajaran 50 personas, cada una pagaría $\$14$). ¿Cuántas personas deben viajar para que el ingreso total de la empresa de transporte sea máximo?

37. En la producción y comercialización de un producto la función de demanda y la función de costo dependen de la cantidad x (con $0 \leq x \leq 15$) respectivamente por:

$$f(x) = 70 - \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{15} \; ; \; C(x) = 50x + 5$$

Si la función de ganancias de la operación está dada por $G(x) = xf(x) - C(x)$ determine el valor de x para el cual se obtiene la mayor ganancia.

38. *a*) Reconstruya un polinomio $P(x)$ de grado 3 del que sabemos que $P(0) = 2$; $P'(0) = P''(0) = 6$ y $P'''(0) = -4$.

b) Sea $Q(x)$ un polinomio cuadrático tal que $Q(2) = -1$; $Q'(2) = 3$; $Q''(2) = 4$. Exprese dicho polinomio en potencias de $(x-2)$.

c) Exprese el polinomio $Q(x)$ en la forma habitual, es decir en potencias de x.

39. Para cada una de las siguientes funciones calcule el polinomio de Taylor de grado pedido, en el punto indicado.

a) $f(x) = \ln\, x$ grado 4, $a = 1$

b) $f(x) = \sin x$ grado 7, $a = 0$

c) $f(x) = e^x$ grado 4, $a = 0$

d) $f(x) = \cos x$ grado 6, $a = 0$

e) $f(x) = e^x$ grado 4, $a = 1$

f) $f(x) = \sin x$ grado 4, $a = \frac{\pi}{4}$

40. *a*) Utilizando la parte *d)* del problema anterior, calcule aproximadamente el $e^{1,1}$.

b) Utilizando la parte *e)* del problema anterior, calcule aproximadamente $e^{-0,2}$.

c) Calcule los valores mencionados en *a)* y *b)* con una calculadora. Compare con los valores obtenidos mediante el desarrollo de Taylor.