Análisis Matemático I (Biólogos)

Segundo cuatrimestre – 2006

Práctica 6: Primitivas, integrales y áreas.

1. i) Determine en cada caso $g(x)$, sabiendo que

   a) $g'(x) = 2$
   b) $g'(x) = \sin x$
   c) $g'(x) = \cos x$
   d) $g'(x) = x + x^2$
   e) $g'(x) = x$
   f) $g'(x) = e^x$
   g) $g'(x) = x^2$
   h) $g'(x) = x^n$

   ii) ¿Es única la función hallada en cada caso?

   iii) En cada caso, determine precisamente $g(x)$ sabiendo además que $g(0) = 5$

   iv) En cada caso, determine precisamente $g(x)$ sabiendo además que $g(1) = -1$

2. Verifique en cada caso que la primitiva de $f(x)$ es $F(x) + C$

   i) $f(x) = x^\alpha$ $\quad F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

   ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad F(x) = \ln\ |x|$

   iii) $f(x) = e^x$ $\quad F(x) = e^x$

   iv) $f(x) = \sin x$ $\quad F(x) = -\cos x$

   v) $f(x) = \cos x$ $\quad F(x) = \sin x$

   vi) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad F(x) = \arcsin\ x$

   vii) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad F(x) = \arccos\ x$

   viii) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad F(x) = \arctan\ x$

   ix) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad F(x) = \tan\ x$

   x) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\quad F(x) = -\cot\ x$

3. Calcule las siguientes primitivas

i) $\int x^2 dx$

ii) $\int \sqrt{x} dx$

iii) $\int (x^2 + \frac{1}{x})^2 dx$

iv) $\int (\frac{1}{x} + 2x - e^x) dx$

v) $\int x^{100} dx$

vi) $\int x^{\frac{-1}{2}} (3x + \sqrt{x}) dx$

vii) $\int (3x - \cos x + 2\sin x) dx$

viii) $\int \frac{1}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)} dx$

4. Aplicando el método de sustitución calcule estas primitivas

i) $\int x(x^2+1)^{-1} dx$

ii) $\int (x+1)^{-1} dx$

iii) $\int \cos(x+5) dx$

iv) $\int (\cos x)(\sin^{-2} x) dx$

v) $\int x^{-1} \ln x dx$

vi) $\int x^{-1} \cos(\ln x) dx$

vii) $\int (t+1)(t^2+2t+3)^{\frac{2}{3}} dt$

viii) $\int (1+y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dy$

ix) $\int \sin(7x) dx$

x) $\int 5\cos(5x) dx$

xi) $\int e^{3x} dx$

xii) $\int x e^{x^2} dx$

xiii) $\int (5-2x)^{-1} dx$

xiv) $\int (x+1)^{-1} \ln(x+1) dx$

xv) $\int x(1+3x^2)^{-1} dx$

xvi) $\int \cos^{-2}(2x) dx$

xvii) $\int (x^2+2x+5)^{-1} dx$

xviii) $\int x(16+x^4)^{-1} dx$

5. Calcule las siguientes primitivas integrando “por partes”

i) $\int (x+2)^4 x dx$

ii) $\int x \sin x \, dx$

iii) $\int x^2 \cos x dx$

iv) $\int \ln x \, dx$

v) $\int x^2 (x+4)^{\frac{-1}{2}} dx$

vi) $\int (t^2+t)(t+1)^{-5} dt$

vii) $\int x^3 \cos x dx$

viii) $\int e^x \cos x dx$

ix) $\int e^{2x} \sin(3x) dx$

x) $\int x \ln x \, dx$

xi) $\int (x^2-2) e^{-x} dx$

6. Mediante la descomposición de funciones racionales en fracciones simples, calcule las primitivas de cada una de las siguientes funciones racionales

i) $f(x) = 4(x-2)^{-1}(x-1)^{-1}$

ii) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-4}$

iii) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$

iv) $f(x) = \dfrac{8x^3+7}{8(x+1)(x+\frac{1}{2})^2}$

v) $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x+2)(x+3)}$

vi) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

vii) $f(x) = (x^2-1)^{-2}$

viii) $f(x) = \dfrac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x}$

7. Calcule las siguientes primitivas:

i) $\int (x+2)\,\mathrm{sen}(x^2+4x-6)dx$

ii) $\int \dfrac{\sin x}{1+2\cos x}dx$

iii) $\int \dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^3+1}}dx$

iv) $\int \ln(x^2+1)dx$

v) $\int x^{\frac{1}{2}} \ln\ x dx$

vi) $\int \dfrac{e^x+3e^{2x}}{1-e^{2x}}dx$

vii) $\int x\ln(x^2+1)dx$

viii) $\int (2x+\dfrac{2}{x})\ln x\ dx$

ix) $\int \dfrac{\ln^3 x}{x}dx$

x) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

xi) $\int \dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^3+1}}dx$

xii) $\int \dfrac{\ln\ x+1}{x(\ln^2 x-3\ln\ x)}dx$

xiii) $\int e^{\sin x}\cos xdx$

xiv) $\int e^x(e^{2x}+e^x+1)^{-1}dx$

xv) $\int x\arcsin\ xdx$

xvi) $\int (x^2+x)(x+1)^{-5}dx$

xvii) $\int (1+\cos 2x)^{-2}\sin 2x\ dx$

xviii) $\int \ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$

xix) $\int \dfrac{(\sin\ x-2)\cos\ x}{\sin^2\ x+\sin\ x-2}dx$

xx) $\int (x^3+x)\cos(x^2+1)dx$

xxi) $\int \dfrac{xe^{3x^2}}{4+e^{3x^2}}dx$

xxii) $\int \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln[x+(1+x^2)]dx}}$

xxiii) $\int \mathrm{tg}\ x\ \ln(\cos x)dx$

xxiv) $\int \sqrt{e^x+1}dx$

xxv) $\int x(\sin\ x+\dfrac{x}{2}\cos\ x)\sqrt{x^2\sin\ x}dx$

xxvi) $\int \mathrm{tg}^3\ xdx$

xxvii) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}dx$

xxviii) $\int x\ln(x^2+1)dx$

xxix) $\int x^5\sqrt[5]{5-x^2}dx$

xxx) $\int \mathrm{cosec}^4\ x\ \mathrm{cotg}^{\frac{3}{2}}\ xdx$

xxxi) $\int \sin^5(\dfrac{x}{6})\cos(\dfrac{x}{6}))dx$

xxxii) $\int \dfrac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

xxxiii) $\int \dfrac{x-\sqrt{\mathrm{arc\,tg}\ 2x}}{1+4x^2}dx$

8. I) Determine $g(x)$ tal que $g'(x) = 2x^3$ y además $g(0) = 3$.

   II) Determine $h(x)$ tal que $h'(x) = 2x^2 + e^x$ y además $g(1) = e$.

   III) Determine una primitiva $F(t)$ de $f(t) = t\,\mathrm{sen}\,5t$ con la condición $F(\frac{\pi}{2})$.

9. Aplicando la Regla de Barrow, determine

   I) $\displaystyle\int_0^x \cos\, t dt$

   II) $\displaystyle\int_1^x t^r dt$ (para $x > 1$)

   III) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \mathrm{sen}\ x dt$

   IV) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t} dt$

   V) $\displaystyle\int_a^b e^t dt$

10. Aplicando los métodos de sustitución y "por partes" calcule las integrales definidas

    I) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^{-3} dx$

    II) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)^{-2} dx$

    III) $\displaystyle\int_3^7 x \ln x dx$

    IV) $\displaystyle\int_0^2 (1+x^2)(x-1)^{\frac{2}{3}} dx$

    V) $\displaystyle\int_1^4 x^{-1} \cos(\ln\ x) dx$

    VI) $\displaystyle\int_0^1 e^x(4+3e^x) dx$

    VII) $\displaystyle\int_3^9 x\sqrt{x+1} dx$

    VIII) $\displaystyle\int_0^1 e^x(e^{2x}+e^x+1) dx$

11. Calcule la derivada de cada una de las funciones que definimos a continuación

    I) $f_1(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$

    II) $f_2(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

    III) $f_3(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\cos\, t}{1+t^2} dt$

    IV) $f_4(x) = \displaystyle\int_2^{\mathrm{tg} x} \mathrm{arc\,tg}\ t\ dt$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

    V) $f_5(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{sen}\ t}{1+t} dt$

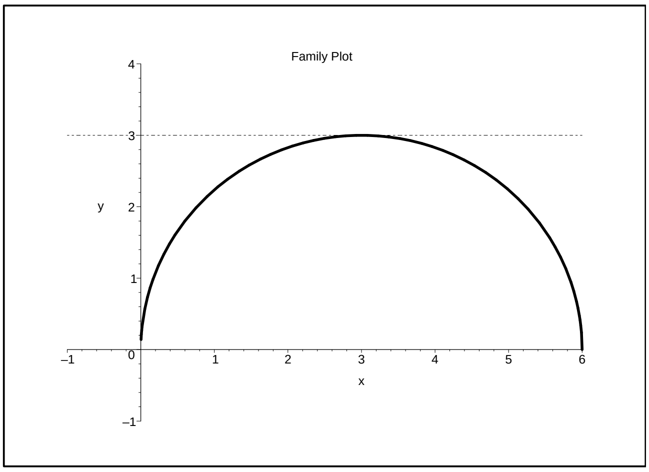
    VI) $f_6(x) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{sen}\ x} \frac{t}{2+t^2} dt$

    VII) $f_7(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \cos\, t^2 dt$

12. Determine los máximos y mínimos locales de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la siguiente expresión:

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4)\ dt$$

13. Sea $f : [0;6] \to \mathbb{R}$ una función continua, y sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. Si el gráfico de $F(x)$ es el que aparece a continuación



I) Calcule $\int_0^6 f(t)\,dt$

II) Verifique que $f(3) = 0$

III) Verifique que $f(x) \geq 0$ en $[0;3]$, y $f(x) < 0$ en $(3;6]$.

IV) Demuestre que $\int_0^6 |f(t)|\,dt = 2\int_0^3 f(t)\,dt = 6$.

14. Calcule el área de la región limitada por:

I) La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje X y las rectas $x = 1, x = 2$.

II) La recta $y = -x + 5$, el eje X y las rectas $x = 6,\ x = 9$.

15. En cada caso, determine el área de la región encerrada por la curva, el eje X y las rectas verticales indicadas.

I) $y = x^3\ ,\ x = 2\ ,\ x = 5$.

II) $y = x^2 - x + 1\ ,\ x = 0\ ,\ x = 1$.

III) $y = x + \frac{1}{x}\ ,\ x = 1\ ,\ x = 2$.

16. Determine $a \in \mathbb{R}, a > 0$ tal que el área de la región encerrada entre el eje horizontal, el gráfico de $f(x) = \ sen\ x$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ valga 5/2.

17. Calcule el área de la región acotada limitada por las curvas dadas en cada caso

I) $y = 3x^2 - x - 3\ ,\ y = -2x^2 + 4x + 7$

II) $y^2 = x\ ,\ x - y = 2$

III) $y = x^{1/3}\ ,\ x = 0\ ,\ y = 1$

IV) $3y^2 - 3y = x - 1\ ,\ y^2 - 2y = x - 3$

v) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = -1$

vi) $y = x^{1/2}$, $y = x - 2$, $x = 0$

vii) $y{=}x^2 + 1$, $y = -x$

viii) $y = x^3 - x$, $y = x$

ix) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a dicha curva en $x = 1$.

18. Sean $p(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad instantánea de una partícula de trayectoria rectilínea, cuya aceleración instantánea es $a(t) = 4t - 16$ y tal que la posición inicial era $p(0) = 0$, y la velocidad inicial $v(0) = 30\,\mathrm{cm/s}$.

    i) Determinar $v(t)$ y verificar que la velocidad es nula para $t = 3$.

    ii) Obtener la expresión de $p(t)$ y calcular la posición para $t = 3$.

19. Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante t vale $a(t) = t(t-100)\,\mathrm{km/h}^2$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición s_0, y su velocidad inicial era 25 km/h . ¿Cuál es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?

20. Una nave espacial está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones de inercia en el interior de la nave se comprueba que recibe una aceleración instantánea $a(t) = t^{1/2} + 1$ cuando $t > 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en m/s^2.

    i) ¿Qué velocidad lleva la nave cuando pasaron 64 s desde el arranque?

    ii) ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

21. Sabemos que $x - 2$ es un factor de $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + a$:

    i) Determine a y factorice $f(x)$ totalmente.

    ii) Haga un gráfico aproximado de $f(x)$.

    iii) Calcule $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$; $\int_{2}^{2{,}5} f(x)\, dx$; $\int_{-1}^{2{,}5} f(x)\, dx$.

22. Sea $y = f(x)$ una curva tal que tiene un punto crítico en (2;3), y $f'(x) = -x + a$ (a constante). Encuentre la función $f(x)$ que describe la curva.

23. El corredor H_1, que es especialista en los 100 metros llanos desarrolla una velocidad instantánea $v_l(t) = 10(1 - e^{3t})$ donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Un segundo corredor H_2 tiene una velocidad instantánea $v_2(t) = \frac{21}{2}(1 - e^{-t})$:

    i) ¿Qué distancia recorre cada corredor en los primeros 10s de carrera?

    ii) La misma pregunta en los primeros 20s.

iii) ¿Cuál de los corredores ganaría una carrera de 100m ?

iv) La misma pregunta, pero para una carrera de 200m .

(Sugerencia: En todos los casos suponer que el espacio inicial es 0.)