Análisis Matemático I (Biólogos)

Primer cuatrimestre – 2006

Práctica 4: Derivadas, reglas de derivación

Notaciones: Dada una función f, un punto $x_1 \in \mathbb{R}$ y un incremento Δx, se define $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. La derivada de f respecto de x se notará indistintamente por f', $D_x f$ o $\dfrac{df}{dx}$. Observar que se tiene entonces que $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, en el caso en que este límite exista.

1. Sean $y = x^2 - 4x + 7$ y $x_1 = 3$.

   Determinar Δy en caso que $\Delta x = 5$ y $\Delta x = -1$.

2. Sean $f(x) = 2 - x^2$, $x_1 = 1$ y $\Delta x = 5$.

   a) Determinar el gráfico de la recta secante que pasa por los puntos $(x_1; f(x_1))$ y $(x_1 + \Delta x_1; f(x_1 + \Delta x_1)$.

   b) Calcular la pendiente de dicha recta.

3. Para cada una de las funciones , calcule, usando la definición, la derivada en los puntos indicados.

   a) $f(x) = x^2 + 1$, $x = 1$ y $x = -2$.

   b) $g(x) = x^3 + 2$, $x = 1$ y $x = -2$.

   c) $h(x) = \sqrt{2x - 1}$, $x = 5$ y $x = \frac{1}{2}$

4. *a*) Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Determine $f'(x_0)$ para $x_0 \neq 0$.

   b) Sea $g(x) = e^{-x}$. Calcule $g(0) + g'(0)$.

   c) Sean $h(x) = 3 - x$ y $m(x) = 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$. Calcule $\frac{m'(1)}{h'(1)}$.

5. Calcule, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 + 1$

   b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$

   c) $f(x) = \sqrt{x}$

   d) $f(x) = \cos x$

   e) $f(x) = \ln\ x$

   f) $f(x) = x^3$

   g) $f(x) = \frac{3}{x+4}$

   h) $f(x) = \sin x$

   i) $f(x) = e^x$

6. Determine los puntos en los que $f(x) = x^3$ coincide con su derivada.

7. *a*) Dada la función $f(x) = |x| + x$, calcule $f'(1)$ y $f'(-2)$.

b) ¿Existe $f'(0)$?

c) Dada la función $g(x) = x \cdot |x|$, calcule $g'(1)$ y $g'(-2)$.

d) Determine $g'(x)$. ¿Existe $g'(0)$?

8. Dadas las siguientes funciones con dominio y codominio en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Demuestre que las tres funciones son continuas en $x = 0$.

b) Realice los gráficos de estas funciones.

c) Demuestre que f y g no son derivables en $x = 0$.

d) Verifique la derivabilidad de $h(x)$ en $x = 0$.

9. En una experiencia cuantitativa, la medición $f(t)$ realizada después de t horas está expresada por $y = f(t) = t^2 + 5t + 100$, donde vale $0 < t < 24$. Si evaluamos esta magnitud cerca de $t_1 = 3$ para $\Delta t \neq 0$, determine Δy y el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Luego calcule la velocidad instantánea de crecimiento de y en $t_1 = 3$.

10. En una medición económica la ganancia $g(x)$ dada por $y = g(x) = -x^2 + 10x - 3$ donde $0 < x < 9$. Encuentre la velocidad instantánea de cambio de y respecto de x en $x_0 = 3$.

11. Calcule $\dfrac{df}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

b) $f(x) = (x+2)(x+3)(3x+1)(2+5x^2)$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{2+\cos x}{3+\sin x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2+1}$

g) $f(x) = e^x \cos x + \ln 3$

h) $f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^3}{3} + e^x$

i) $f(x) = x(3+x^2) + \ln 2$

j) $f(x) = 7\cos x + 5\sin x + xe^x$

k) $f(x) = 2x\sin x - (x^2-2)e^x$

l) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \sin x$

m) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x \ln x}$

n) $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

ñ) $f(x) = \dfrac{x+e^x}{5-x} + \operatorname{tg} x$

o) $f(x) = (\ln x \log_a x) - (\ln a \log_a x)$

p) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

12. Se sabe que una esfera de radio r tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y superficie $S(r) = 4\pi r^2$.

a) Demuestre que $S(r) = \dfrac{dV}{dr}$

b) Halle una relación análoga entre el área de un circulo de radio r y la longitud de su circunferencia.

13. Calcule $D_x f$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando la Regla de la Cadena , es decir la propiedad de derivación de las funciones compuestas :

a) $f(x) = (1+x)^{129}$

b) $f(x) = \cos(3x)$

c) $f(x) = \ln(\sin x)$

d) $f(x) = 2^{\sin x}$

e) $f(x) = \ln(x^5)$

f) $f(x) = 3^{\sin x} + \sin^2 x$

g) $f(x) = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

h) $f(x) = \ln(e^x + \sin 5x)$

i) $f(x) = 3^{\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}} + \dfrac{\sin^3 ax}{3\cos bx}$

j) $f(x) = \ln(\sin x^2) + (2x+1)^{-\frac{1}{2}} - e^{\cos 2x}$

k) $f(x) = e^{x^2+3x}$

l) $f(x) = \operatorname{tg}(5x^5)$

m) $f(x) = 3\sin^4 x$

n) $f(x) = \ln^5 x$

ñ) $f(x) = (3\cos^3 x)^{-1} - (\sin(\ln x))^{-1}$

o) $f(x) = (a + bx^4)^{\frac{1}{3}}$

p) $f(x) = [\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \ln x)]^{\frac{1}{4}}$

q) $f(x) = e^{\sin x} - 3\pi e^{\operatorname{tg} x}$

r) $f(x) = \sin^3(\ln\sqrt{x})\cos^2(e^{3x} + 1)$

s) $f(x) = 3\sin^5(x^3) + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

14. Usando el método de derivación logarítmica calcule las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 x$

b) $f(x) = (\sqrt{x+1})^x$

c) $f(x) = (\ln x)^x$

d) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

e) $f(x) = (\cos x)^{e^x}$

f) $f(x) = (sen^3 x)^{\ln x}$

g) $f(x) = x^{(x^x)}$

h) $f(x) = (\sin x)^{x^2}$

i) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

j) $f(x) = (\ln x)^{x^2+x}$

15. Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^{\sin x} + \sqrt{\sin 3x}$

b) $f(x) = x[(\sin x)^{x^2} + \pi e^x]$

c) $f(x) = \dfrac{x e^{(\sqrt[3]{x} + \cos x - 1)}}{\sin x + \ln(x^2 + e)} + (\cos x)^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{2})^{\pi}$

16. Dos móviles se desplazan con trayectoria rectilínea con las siguientes leyes del movimiento (donde t representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 10 \qquad\qquad g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 2$$

   a) Determine el instante t_0 en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.

   b) Calcule la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

17. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $34,3\,\mathrm{m/s}$ se desplaza siguiendo la ley de movimiento $s(t) = 34,3t - 4,9t^2$.

   a) Calcule la velocidad y la aceleración en los instantes $t_1 = 3$ y $t_2 = 4$.

   b) Determine el instante t_3 en el que la piedra alcanza la altitud máxima (Pista : la velocidad en el instante t_3 debe ser 0)

18. Un tanque cilíndrico, de $2\,\mathrm{m}$ de radio se está llenando a razón de $1\,\mathrm{m}^3$ cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el tanque, si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

19. Se mide la reacción de dos drogas en función del tiempo (medido en horas) y se obtiene las funciones:

$$f_1(t) = te^{-t} \qquad\qquad f_2(t) = t^2e^{-t}$$

   a) ¿Cuál de las dos drogas tiene mayor la reacción máxima?

   b) ¿Cuál de las drogas alcanza la máxima reacción en menor tiempo?

20. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso :

   a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $a = 1$, $a = 0$

   b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$ en $a = 2$

   c) $f(x) = \ln x$ en $a = 1$

   d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $a = 0$

   e) $f(x) = \sin x$ en $a = \frac{\pi}{2}$

   f) $f(x) = (\sqrt{x} + x)^2$ en $a = 4$

   g) $f(x) = e^x(x + \ln x)$ en $a = 1$

   h) $f(x) = e^{-x^2}$ en $a = 0$, $a = 1$

21. Consideremos las funciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$:

   a) Verifique que los gráficos de ambas funciones se cortan en dos puntos.

   b) En uno de esos puntos de intersección ambas curvas tienen la misma tangente. ¿Qué pasa en el otro punto de intersección?

22. El gráfico de la función $A(x) = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ se conoce como "curva versiera" o "curva de Agnesi". Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto de abscisa $x_0 = 2a$.

23. Determine en qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la recta L que une los puntos $(1;0)$ y $(e;1)$.

24. Sea $f(x) = 2x^3$ y sea $g : \mathbb{R} -> \mathbb{R}$ otra función de la que sólo sabemos que $g'(2) = 4$ Con estos datos trate de calcular la derivada de $(g \circ f)$ en el punto $x_0 = 1$.

25. El llamado "Teorema del coseno" permite expresar la longitud del lado a del triángulo $\Delta(A, B, C)$ a partir de los otros dos lados y el ángulo opuesto A por la fórmula :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Si mantenemos b y c constantes, a resulta ser función del ángulo A. En estas condiciones, demuestre que $\dfrac{da}{dA} = h_a$ es precisamente la altura del triángulo correspondiente a la base a.

26. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones :

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 3 \\ 3x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 3, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

27. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x - 1|}, & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x - 2), & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   a) Analice la continuidad de f en $x = 2$.

   b) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudie la derivabilidad de f en $x_1 = 1$ y en $x_2 = 2$

28. Analice por medio del estudio de cocientes incrementales la derivabilidad de la función $f(x) = \sqrt{|x|} \sin(4|x|)$.

29. Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones :

a) $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$

b) $f(x) = \ln(7x)$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = (x^2 + 1)^5$

e) $f(x) = \sin(4x)$

30. *a*) Calcule las derivadas séptima y octava de $f(x) = x^7 - 5x^4 + 8x$.

b) Calcule las derivadas de orden n y $n + 1$ de un polinomio de grado n .

c) Calcule la derivada octava de $f(x) = \sin x$. ¿Qué conclusiones obtiene? ¿Cómo calcularía la derivada de orden 25 de $f(x)$?

d) Lo mismo que en el item c) pero para $g(x) = \cos x$.