Análisis Matemático I (Biólogos)

Primer cuatrimestre – 2006

Práctica 7 : Introducción a las ecuaciones diferenciales

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales donde $y = y(x)$:

   I) $y' = y^2$

   II) $y' = \dfrac{x + \sin x}{3y^2}$

   III) $yy' = x$

   IV) $x^2 y' + y = 0$

   V) $0 = e^{-y} y' + \cos x$

   VI) $y' = e^{y+2x}$

   VII) $y' = 1 + x - y - xy$

   VIII) $y' = \dfrac{\ln x}{xy + xy^3}$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones con la condición inicial dada:

   I) $y' = \dfrac{\sin x}{\sin y}$, siendo $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

   II) $ye^{-x} y' = x$, siendo $y(0) = 1$

   III) $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}$, siendo $y(0) = -1$

   IV) $y' = \dfrac{1+x}{xy}$, siendo $y(1) = -4$

3. I) Hallar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 1$ y que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en cada punto x es $\dfrac{f(x)^2}{x^3}$.

   II) Se sabe que el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ corta al eje y a la altura 7 y en cada punto (x, y) tiene pendiente $4x^3 y$. Hallar f.

4. La tasa de cambio (o velocidad de cambio) del número de lobos $N(t)$ es directamente proporcional a $650 - N(t)$ donde t mide el tiempo en años. Cuando $t = 0$ la población es de 300 lobos y cuando $t = 2$ la población se incremento a 500. Hallar la población al cabo de 3 años.

5. Un tanque contiene 1000 litros de agua pura. Una salmuera que contiene $0,05\,\text{kg}$ de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 litros por minuto. Una otra salmuera que contiene $0,04\,\text{kg}$ de sal por litro de agua entra a razón de 10 litros por minuto. La solución se mantiene perfectamente mezclada y sale del tanque a razón de 15 litros por minuto. Determine la cantidad de sal que queda en el tanque al cabo de t minutos.

6. La difusión a través del tiempo t de una enfermedad en una población fija de M individuos se suele modelar mediante la ecuación diferencial atribuida al biólogo belga P.F. Verhulst:

   $$y' = ky(M - y), \tag{1}$$

   donde k es una constante positiva e y es una función que depende del tiempo t indicando el número de individuos afectados en ese instante t.

Observar que la ecuación (1) indica que tasa del aumento del número de enfermos es proporcional tanto al número de individuos afectados como a aquellos que no lo están.

i) Demostrar que existe una constante C tal que $y(t) = \dfrac{CM}{C + e^{-Mkt}}$.

ii) Interpretar el gráfico de la función $y(t)$.

iii) Hallar la constante C si la población es de 5000 individuos y en el instante $t = 0$ había 100 afectados.

iv) Con los datos del item anterior, si además se sabe que al cabo de 2 días ya son 500 los afectados, ¿en cuánto tiempo la enfermedad afectará a la mitad de la población?

v) ¡Rajemos!

7. Resolver las ecuaciones siguientes:

i) $y' = \dfrac{x+y}{2x}$ ii) $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ iii) $y'x = 2x + 3y$ iv) $y^2 y' = x^2 + \dfrac{y^3}{x}$

8. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

i) $e^x y' + 4e^x y = 1$

ii) $3y + \sin(2x) = y'$

iii) $y' + 5y = e^{5x}$

iv) $y'\cos x - y\sin x = \cos x$

v) $y' - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

vi) $xy' - ay = bx^4$, con a y $b \in \mathbb{R}$

9. * Hallar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de orden 2:

i) $y'' + 3y' - 4y = 0$ ii) $y'' + 2y' + y = 0$ iii) $y'' + y' + y = 0$

En cada caso, hallar la solución que verifica las condiciones iniciales $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

10. * Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden:

i) $y'' + 3y' - 4y = 3e^{2x}$ ii) $y'' + 2y' + y = \cos(2x)$ iii) $y'' + y' + y = x + 1$

11. * Hallar la solución general del siguiente sistema de segundo orden:

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= -x + y \end{cases}$$

Hallar todas las soluciones que verifican que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.