

---

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN Cs. BIOLÓGICAS)

Segundo cuatrimestre de 2008

## Práctica 3: Límites y continuidad

---

**Ejercicio 1.** Usando las propiedades básicas de los límites de funciones calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 2)\sqrt{3x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 1)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{2x+5}}{x + 2}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x + 3} - \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 5}}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{4x+1} - 3}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \tan x}{\cos(\frac{2x}{3})}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

(i)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t$  fijo

(j)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 9x + 2}{x^2 - 4}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 - b^3}{x - b}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

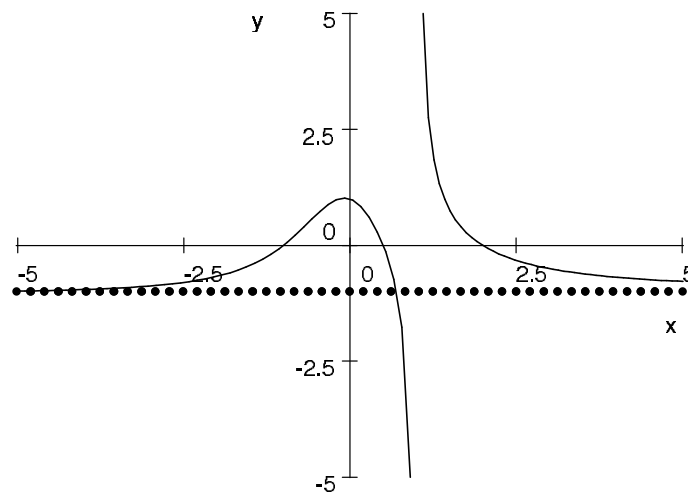
**Ejercicio 2.**

(a) Hacer un gráfico aproximado de  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

(b) Verificar gráficamente que vale  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

(c) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .

**Ejercicio 3.** Consideremos una función  $f(x)$  cuyo gráfico es:



- (a) Determinar el dominio de esta función y sus límites en los extremos del conjunto dominio.
- (b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = -1$  ?
- (c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = 0$  ?
- (d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = m$ , donde  $m$  es un determinado número real? Considerar todas las posibilidades.

**Ejercicio 4.** Calcular los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - \sqrt{3}^{10}}{x} + 9x^7$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2 \ln(x + 1))$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

(j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$

**Ejercicio 5.** De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa  $m$ , cuando se mueve a velocidad  $v$  su masa cambia según la expresión  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $m_0$  es la masa inicial. ¿Qué sucede cuando  $v \rightarrow c$ ?

**Ejercicio 6.** Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar el número de peces maduros (llamados ‘reclutas’) que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si  $R$  es el número de reclutas y  $H$  el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que  $R = R(H) = \frac{H}{\alpha H + \beta}$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas. Mostrarque, de acuerdo con esta función, para un número  $H$  de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

**Ejercicio 7.** Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{c}{1 + ke^{-at}}$$

donde  $c$ ,  $k$  y  $a$  son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo  $t$  y  $a > 0$ .

- (a) ¿Cuál es la población inicial en este modelo?
- (b) ¿Cuál es la población límite? (Calcular el límite de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .)
- (c) Si  $c$  y  $k$  fueran números grandes (respecto de los valores de  $t$ ) la función  $f(t)$  es próxima a la función exponencial  $g(t) = \frac{c}{1+k} e^{at}$ . Supongamos que una población de moscas tiene los parámetros :

$$c = 10 \qquad k = 999 \qquad a = 0,02$$

Verificar mediante una tabla de valores que la logística y la exponencial son muy similares para  $t < 100$ . Ambas funciones seguirán siendo próximas si vale  $100 < t < 200$  ¿Qué ocurre para  $t > 200$ ?

**Ejercicio 8.** Calcular los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin (h(x))$  , con  $h(x)$  cualquier función

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \cos(x + \frac{1}{x})$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos[\ln(1 + \frac{1}{x})]$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin(\frac{1}{x-2})$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot e^{\cos \frac{1}{x}}$

**Ejercicio 9.** Sabiendo que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  calcular:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)}$

(h)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

(i)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

**Ejercicio 10.**(a) Comprobar gráficamente que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (b) ¿Qué puede decir de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n}$  y de  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n}$  para  $n$  par?(c) La misma pregunta para  $n$  impar.**Ejercicio 11.** Consideramos la función  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}$ (a) Determinar el dominio de  $f$ .(b) ¿Se puede calcular directamente  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? ¿Por qué?(c) Determinar la función  $g$  definida por  $g(x) = f(1+x)$ .(d) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ . Deducir  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .(e) ¿Admite  $f(x)$  asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.**Ejercicio 12.** Hallar todos los pares de números reales  $a$  y  $b$  que verifican simultáneamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 2.$$

**Ejercicio 13.** En cada uno de los siguientes casos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . Decidir si existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y representar gráficamente.

(a)  $f(x) = |3x - 6|$

(b)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(c)  $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**Ejercicio 14.** Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5)^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(2x)}{x} \right)^{\frac{\tan x}{3x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{2x-5} \right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x} \right)^{x+1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(2x)}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(3x^2)}{\sin(4x^2)} \right)^{\frac{1}{x}}$$

**Ejercicio 15.** Sabiendo que  $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$  calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^x$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad a \in \mathbb{R} \text{ fijo.}$$

$$(f) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}, \quad a > 0 \text{ fijo.}$$

$$(c) \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$(g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ fijo.}$$

**Ejercicio 16.** Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 x}{x + \sin 2x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

**Ejercicio 17.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mostrar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2}\right)^t$  no depende de la elección de  $b$ .

**Ejercicio 18.** Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

$$(a) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{en } x = 0$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{en } x = 0$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{en } x = 2$$

$$(g) f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad \text{en } x = 2$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3-4 & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

**Ejercicio 19.** ¿Cómo debe elegirse la constante  $A$  en la definición de la siguiente función, si queremos que la función  $f$  resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 20.** Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad (en  $\mathbb{R}$ ) de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas:

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{x(x^2-4)}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}-4}{2x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}-2}$$

$$(d) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} 4x^2-3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x} & \text{si } x > 1 \\ \frac{\text{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 21.** En cada uno de los siguientes casos hallar todos los pares de números reales  $a$  y  $b$  para los que la función  $f$  resulta continua en todo  $\mathbb{R}$ :

$$(a) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ ax+b & \text{si } x \in (0, 2) \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2+b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ ax+b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2+2x}{x^2+x-2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

**Ejercicio 22.** Para cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en  $\mathbb{R}$ . Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para que resulte continua.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (c) f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 23.** Analizar la continuidad en  $x_0 = 5$  de la función así definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{45 \operatorname{sen}(x-5) \ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir de la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R} - \{5\}$ ?

**Ejercicio 24.** Mostrar que el polinomio  $P(x) = x^3 + x + 1$  toma el valor cero en el intervalo  $(-1; 0)$ .

**Ejercicio 25.** Mostrar que los gráficos de las funciones  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = x + 2$  se cortan para algún  $x_0 \geq 0$ .

**Ejercicio 26.** Mostrar que existe un  $x_0 \in (1, e)$  tal que  $\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{3}$ .

**Ejercicio 27.** Determinar la existencia de raíces reales de la función  $f(x) = \frac{|x|}{4-x^2}$  en los intervalos  $[-4; -3]$ ,  $[-3; 3]$  y  $[-1; 1]$ .

**Ejercicio 28.** Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra \$1,10 por kg en compras de menos de 8 kg, mientras que cobra \$1 por kg si se compra 8 kg o más.

- (a) Expresar matemáticamente la función costo  $C(x)$  donde  $x$  indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.
- (b) ¿Es continua  $C(x)$ ? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.

- (c) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre 7,5 kg de este producto.

**Ejercicio 29.** La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a \$1,20 por kg los primeros 5 kg, y para compras mayores a 5 kg cobra \$6 más \$0,90 por cada kilo que sobrepase los 5.

- (a) Expresar matemáticamente la función costo  $C(x)$  donde  $x$  indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.
- (b) ¿Es continua  $C(x)$ ? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.