Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

Segundo cuatrimestre de 2008

Práctica 4: Derivadas

Notaciones: Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un punto $a \in \mathbb{R}$ y un número $\Delta x \in \mathbb{R}$ que llamaremos incremento en x, se define el incremento en y por $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$. La derivada de f respecto de x se notará indistintamente por f', $D_x f$ o $\dfrac{df}{dx}$. Observar que se tiene entonces que $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, en el caso en que este límite exista.

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 4x + 7$ y $a = 3$.

(*a*) Para $\Delta x = 1, \frac{1}{2}, -1$, calcular la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$. Graficar la función y las tres rectas secantes en un mismo gráfico.

(*b*) Dar una expresión (en función de h) de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ (donde $h \neq 0$).

(*c*) Calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ como límite de pendiente de rectas secantes.

(*d*) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$.

(*e*) Repetir los items anteriores para $f(x) = 2 - x^3$ y $a = 1$.

Ejercicio 2. En una experiencia cuantitativa, la medición $f(t)$ realizada después de t horas está expresada por $y = f(t) = t^2 + 5t + 100$, donde $0 < t < 24$. Si evaluamos esta magnitud cerca de $t_1 = 3$ para $\Delta t \neq 0$, determine Δy y el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Luego calcule la velocidad instantánea de crecimiento de y en $t_1 = 3$.

Ejercicio 3. En cierta reacción química la cantidad de moles de moléculas de cierto compuesto (en función del tiempo) está dada por $y = g(t) = -t^2 + 10t - 3$, donde t es el tiempo transcurrido desde que se inició la reacción y $0 < t < 9$. Encuentre la velocidad instantánea de cambio de y respecto de t en $t_0 = 3$.

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes funciones, calcule (si existe) la derivada en los puntos indicados usando la definición.

(*a*) $f(x) = x^2 + 1$, en $x = 1$ y $x = -2$.

(*b*) $g(x) = x^3 + 2$, en $x = 1$ y $x = -2$.

(*c*) $h(x) = \sqrt{2x-1}$, en $x = 5$ y $x = \frac{1}{2}$

Ejercicio 5.

(*a*) Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Determine $f'(a)$ para $a \neq 0$.

(*b*) Sea $g(x) = e^{-x}$. Calcule $g(0) + g'(0)$.

(*c*) Sean $h(x) = 3 - x$ y $m(x) = 1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$. Calcule $\frac{m'(1)}{h'(1)}$.

Ejercicio 6. Calcule, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones.

(*a*) $f(x) = x^2 + 1$

(*b*) $f(x) = x^3$

(*c*) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$

(*d*) $f(x) = \dfrac{3}{x+4}$

(*e*) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

(*f*) $f(x) = \sqrt{x}$

(*g*) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(*h*) $f(x) = \cos x$

(*i*) $f(x) = e^x$

(*j*) $f(x) = \ln\, x$

Ejercicio 7.

(*a*) Dada la función $f(x) = |x| + x$, calcular $f'(1)$ y $f'(-2)$. ¿Existe $f'(0)$?

(*b*) Dada la función $g(x) = x \cdot |x|$, calcular $g'(1)$ y $g'(-2)$. ¿Existe $g'(0)$?

(*c*) Determinar $g'(x)$.

Ejercicio 8. Dadas las siguientes funciones con dominio y codominio $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(*a*) Demuestre que las tres funciones son continuas en $x = 0$.

(*b*) Realice los gráficos de estas funciones.

(*c*) Demuestre que f y g no son derivables en $x = 0$.

(*d*) Estudiar la derivabilidad de $h(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio 9. Calcule $\dfrac{df}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación.

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(b) $f(x) = (x+2)(x+3)(3x+1)(2+5x^2)$

(c) $f(x) = 7\cos x + 5\,\text{sen}\,x + xe^x$

(d) $f(x) = 2x\,\text{sen}\,x - (x^2-2)e^x$

(e) $f(x) = e^x \cos x + \ln 3$

(f) $f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^3}{3} + e^x$

(g) $f(x) = x(3+x^2) + \ln 2$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(i) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

(j) $f(x) = \dfrac{2+\cos x}{3+\text{sen}\,x}$

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2+1}$

(l) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{x \ln x}$

(m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \text{sen}\,x$

(n) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

(ñ) $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(o) $f(x) = \dfrac{x+e^x}{5-x} + \text{tg}x$

(p) $f(x) = (\ln x \log_a x) - (\ln a \log_a x)$

Ejercicio 10. Una bola de radio r tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y superficie $S(r) = 4\pi r^2$.

(a) Demuestre que $S(r) = \dfrac{dV}{dr}$.

(b) Halle una relación análoga entre el área de un circulo de radio r y la longitud de su circunferencia.

Ejercicio 11. Un tanque cilíndrico de $2\,\text{m}$ de radio se está llenando a razón de $1\,\text{m}^3$ cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el tanque, si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

Ejercicio 12. Calcule $D_x f$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando la regla de la cadena, es decir la propiedad de derivación de las funciones compuestas.

(a) $f(x) = (1+x)^{129}$

(b) $f(x) = \cos(3x)$

(c) $f(x) = \ln(\text{sen}\,x)$

(d) $f(x) = \text{tg}(5x^5)$

(e) $f(x) = \ln(x^5)$

(f) $f(x) = 3\,\text{sen}^4 x$

(g) $f(x) = \ln^5 x$

(h) $f(x) = e^{x^2+3x}$

(i) $f(x) = \ln(e^x + \text{sen}\,5x)$

(j) $f(x) = 2^{\text{sen}\,x}$

(k) $f(x) = 3^{\cos x} + \text{sen}^2 x$

(l) $f(x) = e^{\text{sen}\,x} - 3\pi e^{\text{tg}x}$

(m) $f(x) = (a+bx^4)^{\frac{1}{3}}$

(*n*) $f(x) = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

(*ñ*) $f(x) = 3^{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}} + \dfrac{\operatorname{sen}^3(ax)}{3\cos(bx)}$

(*o*) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2)) + (2x+1)^{-\frac{1}{2}} - e^{\cos(2x)}$

(*p*) $f(x) = (3\cos^3 x)^{-1} - (\operatorname{sen}(\ln x))^{-1}$

(*q*) $f(x) = 3\operatorname{sen}^5(x^3) + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

(*r*) $f(x) = [\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \ln x)]^{\frac{1}{4}}$

(*s*) $f(x) = \operatorname{sen}^3(\ln\sqrt{x})\cos^2(e^{3x} + 1)$

Ejercicio 13.

(*a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x$. Calcular $(f^{-1})'(0)$ y $(f^{-1})'(2)$.

(*b*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{11} + x^9 + 2x^3 + 2x + 5$. Calcular $(f^{-1})'(5)$.

Ejercicio 14. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = \arcsin x$

(*b*) $f(x) = \arccos x$

(*c*) $f(x) = \arctan x$

(*d*) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

(*e*) $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$

(*f*) $f(x) = \ln(\arccos x)$

Ejercicio 15. Usando el método de derivación logarítmica calcule las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = x^{3x}$

(*b*) $f(x) = (\sqrt{x+1})^x$

(*c*) $f(x) = (\ln x)^x$

(*d*) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

(*e*) $f(x) = (\cos x)^{e^x}$

(*f*) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

(*g*) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

(*h*) $f(x) = (\ln x)^{x^2+x}$

(*i*) $f(x) = (\operatorname{sen}^3 x)^{\ln x}$

(*j*) $f(x) = x^{(x^x)}$

Ejercicio 16. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\operatorname{sen} 3x}$

(*b*) $f(x) = x[(\operatorname{sen} x)^{x^2} + \pi e^x]$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x e^{(\sqrt[3]{x} + \cos x - 1)}}{\operatorname{sen} x + \ln(x^2 + e)} + (\cos x)^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{2})^{\pi}$

Ejercicio 17. Dos móviles se desplazan con trayectoria rectilínea con las siguientes leyes del movimiento (donde t representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 10 \qquad\qquad g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 2$$

(*a*) Determine el instante t_0 en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.

(*b*) Calcule la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

Ejercicio 18. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $34,3\,\mathrm{m/s}$ se desplaza siguiendo la ley de movimiento $s(t) = 34,3t - 4,9t^2$.

(*a*) Calcule la velocidad y la aceleración en los instantes $t_1 = 3$ y $t_2 = 4$.

(*b*) Determine el instante t_3 en el que la piedra alcanza la altura máxima. (Pista: la velocidad en el instante t_3 debe ser 0.)

Ejercicio 19. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso :

(*a*) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $a = 1$, $a = 0$

(*b*) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \frac{\pi}{2}$

(*c*) $f(x) = \ln x$ en $a = 1$

(*d*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$ en $a = 2$

(*e*) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $a = 0$

(*f*) $f(x) = (\sqrt{x} + x)^2$ en $a = 4$

(*g*) $f(x) = e^{-x^2}$ en $a = 0$, $a = 1$

(*h*) $f(x) = e^x(x + \ln x)$ en $a = 1$

Ejercicio 20. Consideremos las funciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$.

(*a*) Probar que los gráficos de ambas funciones se cortan en dos puntos.

(*b*) Verificar que en uno de esos puntos de intersección ambas curvas tienen la misma recta tangente. ¿Qué pasa en el otro punto de intersección?

Ejercicio 21. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. El gráfico de la función $A(x) = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ se conoce como 'curva de Agnesi'. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto de abscisa $x_0 = 2a$.

Ejercicio 22. Determine en qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la recta L que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra función de la que sólo sabemos que $g'(2) = 4$. Calcular la derivada de $(g \circ f)$ en el punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 24. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(g(x^2 + x)) + 3g(x) = 3\,\mathrm{tg}(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y donde g cumple, además, que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 2$.

(*a*) Calcular $f'(0)$.

(*b*) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

Ejercicio 25. El 'Teorema del coseno' permite expresar la longitud del lado a del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ a partir de los otros dos lados y el ángulo opuesto A por la fórmula:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A}$$

Si mantenemos b y c constantes, a resulta ser función del ángulo A. En estas condiciones, demuestre que $\dfrac{da}{dA} = h_a$ es precisamente la altura del triángulo correspondiente a la base a.

Ejercicio 26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

(*a*) Analice la continuidad de f en $x = 2$.

(*b*) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudie la derivabilidad de f en $x_1 = 1$ y en $x_2 = 2$.

Ejercicio 27. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(*d*) $f(x) = |(x-1).(x+1)|$

(*e*) $f(x) \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq -1 \\ \dfrac{\cos(x\pi)}{\pi} & x > -1 \end{cases}$

(*f*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(*g*) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(*h*) $f(x) = \sqrt{|x|}\ \operatorname{sen}(4|x|)$

Ejercicio 28. Hallar todos los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que existe $f'(1)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 29. Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$

(*b*) $f(x) = \ln(7x)$

(*c*) $f(x) = e^{-x}$

(*d*) $f(x) = (x^2 + 1)^5$

(*e*) $f(x) = \operatorname{sen}(4x)$

(*f*) $f(x) = \cos(2x^3)$

Ejercicio 30.

(*a*) Calcule las derivadas séptima y octava de $f(x) = x^7 - 5x^4 + 8x$.

(*b*) Calcule las derivadas de orden n y $n + 1$ de un polinomio de grado n.

(*c*) Calcule la derivada octava de $f(x) = \operatorname{sen} x$. ¿Qué conclusiones obtiene? ¿Cómo calcularía la derivada de orden 25 de $f(x)$?

(*d*) Lo mismo que en el item (c) pero para $g(x) = \cos x$.