Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

Segundo cuatrimestre de 2008

Práctica 6: Integración

Ejercicio 1.

(*a*) Hallar en cada caso una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla

(i) $g'(x) = 2$

(ii) $g'(x) = x$

(iii) $g'(x) = \operatorname{sen} x$

(iv) $g'(x) = \cos x$

(v) $g'(x) = x^2$

(vi) $g'(x) = e^x$

(vii) $g'(x) = x + x^2$

(viii) $g'(x) = x^n$

(*b*) ¿Son únicas la funciones halladas?

(*c*) Para cada uno de los items (i) a (iv) hallar una función g que cumpla, además, $g(0) = 5$.

(*d*) Para cada uno de los items (v) a (viii) hallar una función g que cumpla, además, $g(1) = -1$.

Ejercicio 2. Verifique en cada caso que $F(X) + C$ (para $C \in \mathbb{R}$) son primitivas de $f(x)$.

(*a*) $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq -1$ $\qquad F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

(*b*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad F(x) = \ln |x|$

(*c*) $f(x) = e^x$ $\qquad F(x) = e^x$

(*d*) $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad F(x) = -\cos x$

(*e*) $f(x) = \cos x$ $\qquad F(x) = \operatorname{sen} x$

(*f*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad F(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

(*g*) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad F(x) = \arccos x$

(*h*) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

(*i*) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad F(x) = \operatorname{tg} x$

(*j*) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ $\qquad F(x) = -\operatorname{cotg} x$

Ejercicio 3. Calcule las siguientes primitivas

(*a*) $\displaystyle\int x^2\, dx$

(*b*) $\displaystyle\int x^{100}\, dx$

(*c*) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx$

(*d*) $\displaystyle\int (3x - \cos\ x + 2\ \operatorname{sen}\ x)\, dx$

(*e*) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + 2x - e^x\right) dx$

(*f*) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}(3x + \sqrt{x})\, dx$

(*g*) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(*h*) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Ejercicio 4. Aplicando el método de sustitución calcule las siguientes primitivas

(*a*) $\displaystyle\int 5\ \cos(5x)\, dx$

(*b*) $\displaystyle\int \cos(x+5)\, dx$

(*c*) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(7x)\, dx$

(*d*) $\displaystyle\int (t+1)(t^2+2t+3)^{\frac{2}{3}}\, dt$

(*e*) $\displaystyle\int e^{3x}\, dx$

(*f*) $\displaystyle\int (x+1)^{-1}\, dx$

(*g*) $\displaystyle\int x^{-1} \ln\ x\, dx$

(*h*) $\displaystyle\int (x+1)^{-1} \ln(x+1)\, dx$

(*i*) $\displaystyle\int x e^{x^2}\, dx$

(*j*) $\displaystyle\int x(x^2+1)^{-1}\, dx$

(*k*) $\displaystyle\int \cos\ x \operatorname{sen}^{-2} x\, dx$

(*l*) $\displaystyle\int (5-2x)^{-1}\, dx$

(*m*) $\displaystyle\int \cos^{-2}(2x)\, dx$

(*n*) $\displaystyle\int x^{-1} \cos(\ln\ x)\, dx$

(*ñ*) $\displaystyle\int x(1+3x^2)^{-1}\, dx$

(*o*) $\displaystyle\int (1+y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\, dy$

(*p*) $\displaystyle\int (x^2+2x+5)^{-1}\, dx$

(*q*) $\displaystyle\int x(16+x^4)^{-1}\, dx$

Ejercicio 5. Calcule las siguientes primitivas aplicando el método de integración por partes.

(*a*) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}\ x\, dx$

(*b*) $\displaystyle\int (x^2-2)e^{-x}\, dx$

(*c*) $\displaystyle\int x^3 \cos\ x\, dx$

(*d*) $\displaystyle\int x \ln\ x\ \ dx$

(*e*) $\int x^2(x+4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

(*f*) $\int (t^2+t)(t+1)^{-5}dt$

(*g*) $\int \ln\ x\ \ dx$

(*h*) $\int \operatorname{arc}\cos x\,dx$

(*i*) $\int e^x \cos\ x\,dx$

(*j*) $\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx$

Ejercicio 6. Mediante la descomposición de funciones racionales en fracciones simples, calcule las primitivas de cada una de las siguientes funciones.

(*a*) $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x+2)(x+3)}$

(*b*) $f(x) = 4(x-2)^{-1}(x-1)^{-1}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-4}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$

(*e*) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

(*f*) $f(x) = (x^2-1)^{-2}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x}$

(*h*) $f(x) = \dfrac{8x^3+7}{8(x+1)(x+\frac{1}{2})^2}$

(*i*) $f(x) = \dfrac{2(2x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$

(*j*) $f(x) = \dfrac{3}{(x^2+2x+3)(x+2)}$

Ejercicio 7. Calcule las siguientes primitivas:

(*a*) $\int \dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^3+1}}\,dx$

(*b*) $\int x^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx$

(*c*) $\int \dfrac{\ln^3 x}{x}\,dx$

(*d*) $\int x \operatorname{arc}\operatorname{sen} x\,dx$

(*e*) $\int (1+\cos 2x)^{-2}\operatorname{sen} x\,dx$

(*f*) $\int \dfrac{(\operatorname{sen} x-2)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\,dx$

(*g*) $\int \dfrac{xe^{3x^2}}{4+e^{3x^2}}\,dx$

(*h*) $\int \operatorname{tg} x\ \ln(\cos x)\,dx$

(*i*) $\int x(\operatorname{sen} x+\dfrac{x}{2}\ \cos x)\sqrt{x^2\operatorname{sen} x}\,dx$

(*j*) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}\,dx$

(*k*) $\int x^5\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

(*l*) $\int \operatorname{sen}^5\left(\dfrac{x}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x}{6}\right)\,dx$

(*m*) $\int \dfrac{x-\sqrt{\operatorname{arc}\operatorname{tg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$

(*n*) $\int \ln(x^2+1)\,dx$

(*ñ*) $\int \dfrac{e^x+3e^{2x}}{1-e^{2x}}\,dx$

(*o*) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(*p*) $\int \dfrac{\ln x+1}{x(\ln^2 x-3\ln x)}\,dx$

(*q*) $\int (x^3+x)\cos(x^2+1)\,dx$

(r) $\int \sqrt{e^x+1}\,dx$

(s) $\int \dfrac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

(t) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

Ejercicio 8.

(a) Hallar $f(x)$ tal que $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)^3 \cos x$ y $f(0) = 3$.

(b) Hallar $g(x)$ tal que $g'(x) = t\ \operatorname{sen}(5t)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(c) Hallar $h(x)$ tal que $h'(x) = \dfrac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Sabemos que f tiene un punto crítico en $x = 2$, que el gráfico de f pasa por el punto $(2;3)$ y que $f'(x) = -x + a$ para cierto $a \in \mathbb{R}$. Hallar $f(x)$.

Ejercicio 10. Aplicando la Regla de Barrow, calcular

(a) $\int_0^1 e^t\,dt$

(b) $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$

(c) $\int_0^x \cos\ t\,dt$

(d) $\int_1^x t^r\,dt$ (donde $x > 1$)

(e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sen}\ t\,dt$

Ejercicio 11. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + a$. Sabemos que $x - 2$ es un factor de f.

(a) Determine a y factorice $f(x)$ totalmente.

(b) Haga un gráfico aproximado de $f(x)$.

(c) Calcule $\int_{-1}^2 f(x)\ dx$; $\int_2^{2{,}5} f(x)\,dx$; $\int_{-1}^{2{,}5} f(x)\ dx$.

Ejercicio 12. Aplicando los métodos de sustitución e integración por partes calcule las siguientes integrales definidas.

(a) $\int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^{-3}\,dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos\ 2x)^{-2}\operatorname{sen}(2x)\,dx$

(c) $\int_3^7 x\ln x\,dx$

(d) $\int_0^2 (1+x^2)(x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

(e) $\int_1^4 x^{-1}\cos(\ln\ x)\,dx$

(f) $\int_0^1 e^x(4+3e^x)\,dx$

(g) $\int_3^9 x\sqrt{x+1}\,dx$

(h) $\int_0^1 e^x(e^{2x}+e^x+1)^{-1}\,dx$

Ejercicio 13. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(*a*) $f_1(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$

(*b*) $f_2(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

(*c*) $f_3(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos\ t}{1+t^2}\,dt$

(*d*) $f_4(x) = \int_2^{\mathrm{tg} x} \operatorname{arc\,tg} t\,dt$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

(*e*) $f_5(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t}dt$

(*f*) $f_6(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{2+t^2}dt$

(*g*) $f_7(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2)dt$

(*h*) $f_8(x) = \int_{\cos x}^{e^x} t^2 dt$

Ejercicio 14. Determine los máximos y mínimos locales de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4)\,dt$$

(*a*) Calcule $\int_0^6 f(t)\,dt$.

(*b*) Verifique que $f(3) = 0$.

(*c*) Verifique que $f(x) > 0$ en $[0;3)$, y $f(x) < 0$ en $(3;6]$.

(*d*) Demuestre que $\int_0^6 |f(t)|\,dt = 2\int_0^3 f(t)\,dt = 6$.

Ejercicio 15. Calcule el área de la región limitada por:

(*a*) La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje x y las rectas $x = 1, x = 2$.

(*b*) La recta $y = -x + 5$, el eje x y las rectas $x = 6$, $x = 9$.

Ejercicio 16. En cada caso, determine el área de la región encerrada por la curva, el eje x y las rectas verticales indicadas.

(*a*) $y = x^3$, $x = 2$, $x = 5$.

(*b*) $y = x^2 - x + 1$, $x = 0$, $x = 1$.

(*c*) $y = x + \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$.

Ejercicio 17. Determine $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que el área de la región encerrada entre el eje x, el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ sea $\frac{5}{2}$.

Ejercicio 18. Calcule el área de la región acotada limitada por las curvas dadas en cada caso

(*a*) $y = 3x^2 - 7x$, $y = x^2 + x - 6$

(*b*) $y^2 = x$, $x - y = 2$

(*c*) $y = x^{1/3}$, $x = 0$, $y = 1$

(*d*) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = -1$

(*e*) $y = x^{1/2}$, $y = x - 2$, $x = 0$

(*f*) $y = x^2 - 1$, $y = -x$

(*g*) $y = x^3 - x$, $y = x$

(*h*) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a dicha curva en $x = 1$.

(*i*) $3y^2 - 3y = x - 1$, $2y^2 - 2y = x - 3$

Ejercicio 19. Sean $p(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad instantánea de una partícula de trayectoria rectilínea, cuya aceleración instantánea es $a(t) = 4t - 16$ y tal que la posición inicial era $p(0) = 0$, y la velocidad inicial $v(0) = 30$.

(*a*) Determinar $v(t)$ y verificar que la velocidad es nula para $t = 3$.

(*b*) Obtener la expresión de $p(t)$ y calcular la posición para $t = 3$.

Ejercicio 20. Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante t está dada por $a(t) = t(t - 100)$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición s_0, y su velocidad inicial era 25. ¿Cuál es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?

Ejercicio 21. Una nave espacial está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior de la nave se comprueba que recibe una aceleración instantánea $a(t) = t^{1/2} + 1$ cuando $t > 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en m/s^2.

(*a*) ¿Qué velocidad lleva la nave cuando pasaron 64 segundos desde el arranque?

(*b*) ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

Ejercicio 22. El corredor H_1, que es especialista en los 100 metros llanos desarrolla una velocidad instantánea $v_1(t) = 10(1 - e^{-3t})$ donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Un segundo corredor H_2 tiene una velocidad instantánea $v_2(t) = \frac{21}{2}(1 - e^{-t})$.

(*a*) ¿Qué distancia recorre cada corredor en los primeros 10 segundos de carrera?

(*b*) ¿Y en los primeros 20 segundos?

(*c*) ¿Cuál de los corredores ganaría una carrera de 100 metros?

(*d*) ¿Y una carrera de 200 metros?