

---

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Verano 2008

## Práctica 2: Función logarítmica y función exponencial

---

**Notación:** Indicaremos con  $\log x$  al logaritmo de  $x$  en base 10, y con  $\ln x$  al logaritmo de  $x$  en base  $e$ .

### Ejercicio 1.

(a) A partir de los gráficos de  $f(x) = 3^x$  y de  $g(x) = 3^{-x}$  obtener los gráficos de:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3^x + \frac{1}{2}, & f_2(x) &= 3^x - \frac{1}{2}, & f_3(x) &= 3^{x+\frac{1}{2}}, & f_4(x) &= 3^{x-\frac{1}{2}}, \\ f_5(x) &= 3^{-x} + \frac{1}{2}, & f_6(x) &= 3^{-x} - \frac{1}{2}, & f_7(x) &= 3^{-(x+\frac{1}{2})}, & f_8(x) &= 3^{-(x-\frac{1}{2})}, \\ f_9(x) &= 3^{-(x+\frac{1}{2})} + 3, & f_{10}(x) &= -(3^{x+\frac{1}{2}}), & f_{11} &= 3^{-x+1} + 3^{-x}. \end{aligned}$$

(b) A partir de los gráficos de  $f(x) = \log_3 x$  y de  $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$  obtener los gráficos de:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \log_3 x + 2, & f_2(x) &= \log_3 x - 2, & f_3(x) &= \log_3(x + 2), & f_4(x) &= \log_3(x - 2), \\ f_5(x) &= \log_{\frac{1}{3}} x + 2, & f_6(x) &= \log_{\frac{1}{3}} x - 2, & f_7(x) &= \log_{\frac{1}{3}}(x + 2), & f_8(x) &= \log_{\frac{1}{3}}(x - 2), \\ f_9(x) &= -\log_3(x + 2), & f_{10}(x) &= -\log_3 x + 2, & f_{11}(x) &= \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{3}, & f_{12}(x) &= \log_{\frac{1}{3}} x^2. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.** Para los siguientes valores de  $x$ : 25; 125; 3125;  $\frac{1}{5}$ ;  $\frac{1}{625}$  determinar, sin usar la calculadora,

$$\log_5 x \qquad \log_{25} x \qquad \frac{\log_{25} x}{\log_5 x}.$$

¿Qué se observa? Explique por qué ocurre, justificando.

**Ejercicio 3.** Sabiendo que  $\log 2 \simeq 0,30103$  y  $\log 3 \simeq 0,47712$  determinar aproximadamente, sin el uso de calculadora, los siguientes logaritmos :

$$\log 0,003 ; \log 125 ; \log_2 5 ; \log_{\frac{1}{2}} 3 ; \log_6 2 ; \log_6 5.$$

**Ejercicio 4.** El geólogo C. F. Richter definió la magnitud de un sismo (o terremoto) como  $\log(I/S)$  donde  $I$  es la intensidad del terremoto (medida por la amplitud de oscilación de la aguja de un sismógrafo situado a 100 km del sismo) y  $S$  es la intensidad de un movimiento sísmico “mínimo” donde la amplitud es 1 micra =  $10^{-4}$  cm. El terremoto de San Francisco de 1989 tuvo una magnitud de 6,9 en la escala de Richter. El terremoto de 1906 en la misma ciudad tuvo una intensidad 25 veces mayor. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter?

**Ejercicio 5.** Resolver las siguientes ecuaciones :

$$(a) (\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{2}) \log_2 x = 3$$

$$(h) 9^x - 12 + 27 \cdot 9^{-x} = 0$$

$$(b) \frac{1}{3^{2x}} - 3 \cdot 9^x = 0$$

$$(i) \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4^x = 0$$

$$(c) \frac{5 \log_5 x + 28}{3} = 1$$

$$(j) 2(\log_4 x)^2 - 17 \log_4 x + 8 = 0$$

$$(d) 3 \cdot x^2 8^x + 1 = 0$$

$$(k) -3^x + \frac{1}{9^{x-1}} = 0$$

$$(e) 3^{x+2} - 3^{x+1} - \frac{1}{4} = 0$$

$$(l) 6 \cdot e^x + 20 \cdot e^{-x} = 23$$

$$(f) \log_2^2 x + 6 \cdot \log_{\frac{1}{8}} x = 8$$

$$(g) \log_5^2 x - 2 \log_{\frac{1}{5}} x - 3 = 0$$

$$(m) \sqrt{x+2} \sqrt{3^{x-1}} = \sqrt{x+1} \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^8}$$

**Ejercicio 6.** La población de un país (medida en millones de habitantes) crece exponencialmente de acuerdo con la expresión  $f(t) = 30 \cdot e^{0,01t}$  donde la variable  $t$  mide en años el tiempo transcurrido desde el “año base” (en este caso, 1980) hasta el momento en que se realiza la evaluación.

(a) ¿Cuál era la población en 1980? ¿Y en 1990?

(b) ¿En qué año la población duplicará a la de 1980?

(c) ¿En qué año la población será el doble de la de 1990?

**Ejercicio 7.** En una solución química la concentración de cationes hidronio ( $\text{H}_3\text{O}^+$ , o simplemente  $\text{H}^+$ ), medida en moles por litro, se indica con el símbolo  $[\text{H}^+]$ . El potencial hidrógeno esta definido por  $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ .

(a) Calcular el valor del pH para soluciones cuyas respectivas concentraciones de cationes hidronio sean:  $4,56 \cdot 10^{-3}$ ;  $6,2 \cdot 10^{-6}$  y  $7,14 \cdot 10^{-10}$ .

(b) Calcular la concentración  $[\text{H}^+]$  para soluciones cuyos pH sean, respectivamente, 9,3; 4,7, 1,1.

**Ejercicio 8.** ¿Puede ser exponencial la función  $y = f(x)$  que satisface los siguientes valores?

$x$	2	4	6
$y$	12	48	190

- (a) Si la respuesta fuera negativa, justificarla.
- (b) Si la respuesta fuera afirmativa, determinar  $k$  y  $a$  tales que  $f(x) = k \cdot a^x$ . Representar gráficamente indicando en el gráfico los valores de  $k$  y de  $a$ .

**Ejercicio 9.** Como en el problema anterior, siendo la tabla de valores :

$x$	1	3	5
$y$	3	27	243

**Ejercicio 10.** Determinar analíticamente los parámetros  $k$  y  $a$  de las funciones exponenciales de la forma  $y = k \cdot a^x$  que pasan por los siguientes pares de puntos:

- (a)  $P_1 = (0; 3)$  ;  $P_2 = (1,4; 0,84)$                       (c)  $P_1 = (-1; 0,086)$  ;  $P_2 = (2; 0,84)$
- (b)  $P_1 = (-1; 150)$  ;  $P_2 = (1; 82)$                       (d)  $P_1 = (-1; 15000)$  ;  $P_2 = (5; 7200)$

**Ejercicio 11.** Determinar analíticamente el punto de intersección de los siguientes pares de funciones exponenciales:

- (a)  $f(t) = 1,2 \cdot (0,83)^t$  con  $g(t) = 0,65 \cdot (1,2)^t$ .
- (b)  $f(x) = 1300 \cdot (0,9)^x$  con  $g(x) = 750 \cdot (2,16)^x$ .

**Ejercicio 12.** Atacando determinadas esporas bacterianas con fenol al 5% se obtuvieron los datos de la tabla adjunta que indican el número de bacterias sobrevivientes por gota de una mezcla del cultivo con el desinfectante:

Tiempo (hs)	0,5	1	2,5	3	4
Bacterias	300	220	92	68	98

- (a) Comprobar que la ley que rige el proceso es (aproximadamente) exponencial. Determinar los parámetros de la función a partir de su gráfico.
- (b) ¿Cuál era la cantidad inicial de esporas por gota de mezcla?
- (c) ¿Cuántas esporas quedan después de 2 horas de comenzada la desinfección?
- (d) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que queden 10 esporas por gota?

**Ejercicio 13.** En una reacción química monomolecular, cuya proporción de elementos sigue una ley exponencial en el tiempo, se observa que después 100 minutos de iniciado el experimento se descompuso el 25,9% de cierta sustancia.

- (a) Determinar analítica y gráficamente la función que describe la cantidad remanente de dicha sustancia en función del tiempo transcurrido desde el comienzo.
- (b) ¿Cuánto quedará después de 4 horas?
- (c) ¿Cuál es el tiempo necesario para que se descomponga la mitad?

**Ejercicio 14.** Estamos observando una colonia de hongos que se reproducen de manera tal que la superficie cubierta crece exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. A los 0,5 días de detectados el área afectada es de  $0,17 \text{ mm}^2$ , y a los 3 días es de  $1,35 \text{ mm}^2$ .

- (a) Determinar analíticamente la función que rige este crecimiento.
- (b) ¿En que momento el área afectada habrá sido  $0,82 \text{ mm}^2$  ?
- (c) ¿Cuál será el área cubierta después de 11 días?

**Ejercicio 15.** Si tenemos una masa inicial de  $K_0$  gramos de radio, después de transcurridos  $t$  siglos, parte de la sustancia se habrá desintegrado, quedando un cantidad remanente expresada por  $f(t) = K_0 \cdot e^{-0,038t}$ . Determinar el tiempo necesario para que se haya desintegrado precisamente la mitad de la masa inicial. Este lapso se conoce como *vida media* y es una constante característica de cada elemento radiactivo.

**Ejercicio 16.** Tenemos ahora 5g de una sustancia radiactiva cuya vida media es de 10 minutos. La función que rige el proceso de desintegración es  $f(t) = K_0 \cdot e^{-kt}$ . ¿Qué cantidad de sustancia quedará remanente después de transcurridos 20 minutos?

**Ejercicio 17.** Recordemos que si  $T_k$  y  $T_c$  miden la temperatura de un cuerpo en grados Kelvin y grados Celsius, respectivamente, vale que  $T_k = T_c + 273$ . Por otra parte la resistencia  $R$  de un semiconductor varía con la temperatura  $T$  (medida en grados Kelvin) de acuerdo con la siguiente expresión:  $R(T) = A \cdot e^{B/T}$  donde  $A$  y  $B$  son determinadas por el material del semiconductor. Para una muestra de silicio se observan las siguientes mediciones :

$$\begin{array}{ll} t_1 = 0^\circ\text{C} & R_1 = 1,8 \Omega \cdot m \\ t_2 = 20^\circ\text{C} & R_2 = 0,6 \Omega \cdot m \end{array}$$

- (a) Calcular los coeficientes  $A$  y  $B$  de la expresión antes mencionada.

(b) Calcular la resistencia de esa muestra a una temperatura de  $80^\circ\text{C}$ .

**Ejercicio 18.** Un flujo luminoso atraviesa perpendicularmente una solución y es parcialmente absorbida su energía por el soluto. En el interior de la solución la intensidad lumínica  $l$  es función de la distancia  $x$  recorrida a través de la solución y se verifica  $\ln(l(x)) = -kx + A$

(a) Expresar  $l$  como una función de  $x$ .

(b) Sea  $l_1$  la intensidad a la entrada, y  $l_2$  la intensidad de salida después de un recorrido de longitud  $l$ . Mostrar que la *transmisión lumínica*  $\frac{l_2}{l_1}$  vale  $e^{-kl}$ .

(c) Si la constante  $k$  vale  $200 \cdot c$  ( $c$  es concentración), ¿para qué  $c$  la transmisión es  $\frac{1}{2}$  ?

**Ejercicio 19.** De una jaula se escaparon 10 conejos en una zona donde no había de estos roedores. Al principio no se le dio importancia, e incluso se olvidó el asunto. Pero al cabo de un tiempo empezaron a verse con demasiada frecuencia. Alarmados ante su voracidad, a principio de un año se hizo un recuento por métodos aproximados: había unos 2400. Han pasado 6 meses desde entonces. Se han vuelto a contar y hay unos 7000. Suponiendo que los recuentos hayan sido correctos:

(a) ¿Cuál es el porcentaje en el que aumento?

(b) ¿Cuánto tiempo hace que se escaparon los 10 primeros conejos?

(c) Si no se disponen de medidas para disminuir su número ¿cuántos habrá dentro de 2 años?

**Ejercicio 20.** La masa de madera de un bosque aumenta un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (biomasa) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo un siglo; la función

$$M = M(t) = 1,4^t$$

da la cantidad de masa vegetal, en un instante cualquiera  $t$  expresado en siglos a partir de 1800.

(a) Calcular la cantidad de madera que había en 1900, 1991 y 1850.

(b) Calcular cuando la masa de madera será el triple de la que había en 1800 y cuando fue la tercera parte que en 1800 (observar la longitud de estos períodos).

**Ejercicio 21.** Se considera las funciones

$$f(x) = \log \left( 1 - \frac{x+1}{x-2} \right) \quad h(x) = 10^x.$$

Hallar el dominio de  $h \circ f$  y  $f \circ h$ .

**Ejercicio 22.** Sea

$$f(x) = \left[ \ln \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) - \ln 3 \right]^{1/2}.$$

(a) Hallar el dominio natural de  $f$ .

(b) Probar que  $f$  es inyectiva.

**Ejercicio 23.** Hallar el dominio natural de la siguiente función  $f(x) = \log_4(|e^x - 1| - 3)$ . ¿ $f$  es inyectiva?