
ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN Cs. BIOLÓGICAS)

Primer cuatrimestre de 2009

Práctica 2: Función logarítmica y función exponencial

Notación: Para $a > 0$ indicaremos al logaritmo en base a de x por $\log_a x$. Usaremos $\log x$ para logaritmo de x en base 10 y $\ln x$ para el logaritmo de x en base e . Como las funciones $\log_a x$ y a^x son una inversa de la otra, se tienen las identidades: $\bullet x = a^{\log_a x}$ para $x > 0$ y $\bullet x = \log_a a^x$ para $x \in \mathbb{R}$. Además, si $a, b > 0$ tenemos $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Ejercicio 1.

(a) A partir de los gráficos de $f(x) = 2^x$ y de $g(x) = 2^{-x}$ obtener los gráficos de:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2^x + 1 & f_2(x) &= 2^x - 1 & f_3(x) &= 2^{x+1} & f_4(x) &= 2^{x-1} \\ f_5(x) &= 2^{-x} + 1 & f_6(x) &= 2^{-x} - 1 & f_7(x) &= 2^{-(x+1)} & f_8(x) &= 2^{-(x-1)} \\ f_9(x) &= 2^{-(x+1)} + 2 \end{aligned}$$

(b) A partir de los gráficos de $f(x) = \log_2 x$ y de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ obtener los gráficos de:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \log_2 x + 1 & f_2(x) &= \log_2 x - 1 & f_3(x) &= \log_2(x + 1) & f_4(x) &= \log_2(x - 1), \\ f_5(x) &= \log_{\frac{1}{2}} x + 1 & f_6(x) &= \log_{\frac{1}{2}} x - 1 & f_7(x) &= \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) & f_8(x) &= \log_{\frac{1}{2}}(x - 1). \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Para los siguientes valores de x : 4 ; 64 ; 32 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$ determinar:

$$\log_2 x \qquad \log_4 x \qquad \frac{\log_4 x}{\log_2 x}.$$

¿Qué se observa? Explique por qué ocurre, justificando.

Ejercicio 3. Sabiendo que $\log 2 \simeq 0,30103$ y $\log 3 \simeq 0,47712$ determinar aproximadamente, sin el uso de calculadora, los siguientes logaritmos :

$$\log 0,003 \ ; \ \log 125 \ ; \ \log_2 5 \ ; \ \log_{\frac{1}{2}} 3 \ ; \ \log_6 2 \ ; \ \log_6 5.$$

Ejercicio 4. El geólogo C. F. Richter definió la magnitud de un sismo (o terremoto) como $\log(I/S)$ donde I es la intensidad del terremoto (medida por la amplitud de oscilación de la aguja de un sismógrafo situado a 100 km del sismo) y S es la intensidad de un movimiento sísmico "mínimo" donde la amplitud es 1 micra = 10^{-4} cm . El terremoto de San Francisco de 1989 tuvo

una magnitud de 6,9 en la escala de Richter. El terremoto de 1906 en la misma ciudad tuvo una intensidad 25 veces mayor. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter?

Ejercicio 5. Resolver las siguientes ecuaciones :

$$(a) 5 \log_5 x + 5 = 0$$

$$(h) 3^x - 12 + 27 \cdot 3^{-x} = 0$$

$$(b) 4 \cdot 3^x - 4 = 0$$

$$(i) 2^x - 2^{2-x} = 0$$

$$(c) \frac{2 \log_2 x - 3}{3} = 1$$

$$(j) 2(\log_3 x)^2 - 17 \log_3 x + 8 = 0$$

$$(d) 3 \cdot 4^x + 6 = 0$$

$$(k) 4 \cdot 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 5 = 0$$

$$(e) 5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 8 = 0$$

$$(l) e^x - 3 + 2 \cdot e^{-x} = 0$$

$$(f) e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

$$(g) 3 \log_3^2 x - 6 \log_3 x - 9 = 0$$

$$(m) \sqrt[x+2]{5^{x-1}} = \sqrt[x+1]{5^x}$$

Ejercicio 6. La población de un país (medida en millones de habitantes) crece exponencialmente de acuerdo con la expresión $f(t) = 30 \cdot e^{0,01t}$ donde la variable t mide en años el tiempo transcurrido desde el "año base" (en este caso, 1980) hasta el momento en que se realiza la evaluación.

(a) ¿Cuál era la población en 1980? ¿Y en 1990?

(b) ¿En qué año la población duplicará a la de 1980?

(c) ¿En qué año la población será el doble de la de 1990?

Ejercicio 7. En una solución química la concentración de cationes hidronio (H_3O^+ , o simplemente H^+), medida en moles por litro, se indica con el símbolo $[\text{H}^+]$. El potencial hidrógeno está definido por $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$.

(a) Calcular el valor del pH para soluciones cuyas respectivas concentraciones de cationes hidronio sean: $4,56 \cdot 10^{-3}$; $6,2 \cdot 10^{-6}$ y $7,14 \cdot 10^{-10}$.

(b) Calcular la concentración $[\text{H}^+]$ para soluciones cuyos pH sean, respectivamente, 9,3; 4,7, 1,1.

Ejercicio 8. ¿Puede ser exponencial la función $y = f(x)$ que satisface los siguientes valores?

x	2	4	6
y	12	48	194

(a) Si la respuesta fuera negativa, justificarla.

(b) ¿Cuánto quedará después de 4 horas?

(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para que se descomponga la mitad?

Ejercicio 14. Una colonia de hongos se reproduce de manera tal que la superficie cubierta crece exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. A los 0,5 días de detectados el área afectada es de $0,17 \text{ mm}^2$, y a los 3 días es de $1,35 \text{ mm}^2$.

(a) Determinar analíticamente la función que rige este crecimiento.

(b) ¿En que momento el área afectada habrá sido $0,82 \text{ mm}^2$?

(c) ¿Cuál será el área cubierta después de 11 días?

Ejercicio 15. Si tenemos una masa inicial de K_0 gramos de radio, después de transcurridos t siglos, parte de la sustancia se habrá desintegrado, quedando un cantidad remanente expresada por $f(t) = K_0 \cdot e^{-0,038t}$. Determinar el tiempo necesario para que se haya desintegrado precisamente la mitad de la masa inicial. Este lapso se conoce como *vida media* y es una constante característica de cada elemento radiactivo.

Ejercicio 16. Tenemos ahora 5 g de una sustancia radiactiva cuya vida media es de 10 minutos. La función que rige el proceso de desintegración es $f(t) = K_0 \cdot e^{-kt}$. ¿Qué cantidad de sustancia quedará remanente después de transcurridos 20 minutos?

Ejercicio 17. Recordemos que si T_k y T_c miden la temperatura de un cuerpo en grados Kelvin y grados Celsius, respectivamente, vale que $T_k = T_c + 273$. Por otra parte la resistencia R de un semiconductor varía con la temperatura T (medida en grados Kelvin) de acuerdo con la siguiente expresión: $R(T) = A \cdot e^{B/T}$ donde A y B son determinadas por el material del semiconductor. Para una muestra de silicio se observan las siguientes mediciones :

$$\begin{array}{ll} t_1 = 0^\circ\text{C} & R_1 = 1,8 \Omega \cdot m \\ t_2 = 20^\circ\text{C} & R_2 = 0,6 \Omega \cdot m \end{array}$$

(a) Calcular los coeficientes A y B de la expresión antes mencionada.

(b) Calcular la resistencia de esa muestra a una temperatura de 80°C .

Ejercicio 18. Un flujo luminoso atraviesa perpendicularmente una solución y es parcialmente absorbida su energía por el soluto. En el interior de la solución la intensidad lumínica l es función de la distancia x recorrida a través de la solución y se verifica $\ln(l(x)) = -kx + A$

(a) Expresar l como una función de x .

- (b) Sea I_1 la intensidad a la entrada, y I_2 la intensidad de salida después de un recorrido de distancia d . Mostrar que la *transmisión lumínica* $\frac{I_2}{I_1}$ vale e^{-kd} .
- (c) Si la constante k vale $200c$ (donde c es la concentración de soluto), ¿para qué c la transmisión es $\frac{1}{2}$?