Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

Primer cuatrimestre de 2009

Práctica 3: Límites y continuidad

Ejercicio 1. Usando las propiedades básicas de los límites de funciones calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado:

(a) $\lim_{x\to 1}(x^2+3x+2)\sqrt{3x-1}$

(b) $\lim_{x\to 0}\ln(x+1)$

(c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{e^{2x+5}}{x+2}$

(d) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

(e) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+5}}$

(f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{4x+1}-3}$

(g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x+\tan\, x}{\cos(\frac{2x}{3})}$

(h) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$ con $t\in\mathbb{R}$, t fijo

(j) $\lim_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+9x+2}{x^2-4}$

(k) $\lim_{x\to b}\dfrac{x^3-b^3}{x-b}$

(l) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(m) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

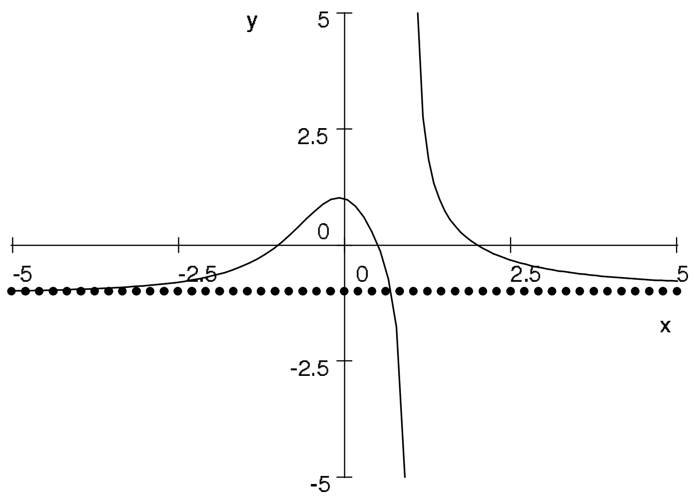
Ejercicio 2.

(a) Hacer un gráfico aproximado de $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

(b) Verificar gráficamente que vale $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0;\ \lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(c) Para cada $n\in\mathbb{N}$ calcular $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^n}=0;\ \lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$.

Ejercicio 3. Consideremos una función $f(x)$ cuyo gráfico es:



(a) Determinar el dominio de esta función y sus límites en los extremos del conjunto dominio.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -1$?

(c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$?

(d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = m$, donde m es un determinado número real? Considerar todas las posibilidades.

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^7 - \sqrt{3}}{x}^{10} + 9x^7$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln\, x - 2\ln(x+1))$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$

Ejercicio 5. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa m, cuando se mueve a velocidad v su masa cambia según la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$, donde c es la velocidad de la luz y m_0 es la masa inicial. ¿Qué sucede cuando $v \to c$?

Ejercicio 6. Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar el número de peces maduros (llamados 'reclutas') que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si R es el número de reclutas y H el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que $R = R(H) = \dfrac{H}{\alpha H + \beta}$ donde α y β son constantes positivas. Mostrarque, de acuerdo con esta función, para un número H de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

Ejercicio 7. Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{c}{1 + ke^{-at}}$$

donde c, k y a son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo t y $a > 0$.

(*a*) ¿Cuál es la población inicial en este modelo?

(*b*) ¿Cuál es la población límite? (Calcular el límite de $f(t)$ cuando $t \to +\infty$.)

(*c*) Si c y k fueran números grandes (respecto de los valores de t) la función $f(t)$ es próxima a la función exponencial $g(t) = \dfrac{c}{1+k}\, e^{at}$. Supongamos que una población de moscas tiene los parámetros :

$$c = 10 \qquad k = 999 \qquad a = 0,02$$

Verificar mediante una tabla de valores que la logística y la exponencial son muy similares para $t < 100$. Ambas funciones seguirán siendo próximas si vale $100 < t < 200$ ¿Qué ocurre para $t > 200$?

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \,\sin\frac{1}{x}$

(*b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} \cos(x + \frac{1}{x})$

(*c*) $\displaystyle\lim_{x\to 2} (x^2 - 4)\sin(\frac{1}{x-2})$

(*d*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \,\sin\,(h(x))$, con $h(x)$ cualquier función

(*e*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\, x \,.\, \cos[\ln(1 + \frac{1}{x})]$

(*f*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}.e^{\cos\frac{1}{x}}$

Ejercicio 9. Sabiendo que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin\, t}{t} = 1$ calcular:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin\ x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan\ x}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\ 3x}{\sin\ 2x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\ x}{x}$

(f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\ x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)}$

(h) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin\ x}{h}$

(i) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos\ x}{h}$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\ x}{x}$

(k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

Ejercicio 10.

(a) Comprobar gráficamente que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

(b) ¿Qué puede decir de $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n}$ y de $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n}$ para n par?

(c) La misma pregunta para n impar.

Ejercicio 11. Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^3}$

(a) Determinar el dominio de f.

(b) ¿Se puede calcular directamente $\lim_{x\to 1} f(x)$? ¿Por qué?

(c) Determinar la función g definida por $g(x) = f(1+x)$.

(d) Calcular $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. Deducir $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(e) ¿Admite $f(x)$ asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

Ejercicio 12. Hallar todos los pares de números reales a y b que verifican simultáneamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 2.$$

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Decidir si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y representar gráficamente.

(a) $f(x) = |3x-6|$

(b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 14. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin(2x)}{\sin\ x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)^{\frac{\tan x}{3x}}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x}\right)^{x+1}$

(*f*) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin(3x^2)}{\sin(4x^2)}\right)^{\frac{1}{x}}$

Ejercicio 15. Sabiendo que $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e$ calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^x$

(*b*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, $a\in\mathbb{R}$ fijo.

(*c*) $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin\ x)^{\frac{1}{x}}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(*f*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(a+h)-\ln\ a}{h}$, $a>0$ fijo.

(*g*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$

(*h*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{a+h}-e^a}{h}$, $a\in\mathbb{R}$ fijo.

Ejercicio 16. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(\frac{x}{2})}{\pi-x}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin^2 x}{x+\sin\ 2x}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ \sin\dfrac{1}{x}$

(*f*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

Ejercicio 17. Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Mostrar que $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2})^t$ no depende de la elección de b.

Ejercicio 18. Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

(*a*) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ en $x=0$

(*b*) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en $x=0$

(*c*) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $x=0$

(*d*) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en $x=0$

(*e*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 2$

(*f*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

(*g*) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ en $x = 2$

(*h*) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Ejercicio 19. ¿Cómo debe elegirse la constante A en la definición de la siguiente función, si queremos que la función f resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 20. Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad (en $\mathbb{R}$) de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 4}{2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 2}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

(*e*) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(*f*) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

(*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes casos hallar todos los pares de números reales a y b para los que la función f resulta continua en todo $\mathbb{R}$:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ ax + b & \text{si } x \in (0, 2) \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Ejercicio 22. Para cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$. Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para que resulte continua.

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad (c)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$(b)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 23. Analizar la continuidad en $x_0 = 5$ de la función así definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \dfrac{45\,\mathrm{sen}(x-5)\ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir de la continuidad de f en $\mathbb{R} - \{5\}$?

Ejercicio 24. Mostrar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + 1$ toma el valor cero en el intervalo $(-1;0)$.

Ejercicio 25. Mostrar que los gráficos de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 2$ se cortan para algún $x_0 \geq 0$.

Ejercicio 26. Mostrar que existe un $x_0 \in (1, e)$ tal que $\dfrac{\ln x_0}{x_0} = \dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 27. Determinar la existencia de raíces reales de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{4-x^2}$ en los intervalos $[-4;-3], [-3;3]$ y $[-1;1]$.

Ejercicio 28. Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra $\$1,10$ por kg en compras de menos de 8 kg, mientras que cobra $\$1$ por kg si se compra 8 kg o más.

(*a*) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

(*b*) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.

(*c*) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre $7,5\,\mathrm{kg}$ de este producto.

Ejercicio 29. La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a $\$1,20$ por kg los primeros $5\,\mathrm{kg}$, y para compras mayores a $5\,\mathrm{kg}$ cobra $\$6$ más $\$0,90$ por cada kilo que sobrepase los 5.

(*a*) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

(*b*) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.