

---

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN Cs. BIOLÓGICAS)

Primer cuatrimestre de 2009

## Práctica 6: Integración

---

### Ejercicio 1.

(a) Hallar en cada caso una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla

(i)  $g'(x) = 2$

(v)  $g'(x) = x^2$

(ii)  $g'(x) = x$

(vi)  $g'(x) = e^x$

(iii)  $g'(x) = \text{sen } x$

(vii)  $g'(x) = x + x^2$

(iv)  $g'(x) = \text{cos } x$

(viii)  $g'(x) = x^n$

(b) ¿Son únicas las funciones halladas?

(c) Para cada uno de los ítems (i) a (iv) hallar una función  $g$  que cumpla, además,  $g(0) = 5$ .

(d) Para cada uno de los ítems (v) a (viii) hallar una función  $g$  que cumpla, además,  $g(1) = -1$ .

**Ejercicio 2.** Verifique en cada caso que  $F(x) + C$  (para  $C \in \mathbb{R}$ ) son primitivas de  $f(x)$ .

(a)  $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq -1 \quad F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

(b)  $f(x) = \frac{1}{x} \quad F(x) = \ln |x|$

(c)  $f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$

(d)  $f(x) = \text{sen } x \quad F(x) = -\text{cos } x$

(e)  $f(x) = \text{cos } x \quad F(x) = \text{sen } x$

(f)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad F(x) = \text{arc sen } x$

(g)  $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad F(x) = \text{arc cos } x$

(h)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad F(x) = \text{arc tg } x$

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F(x) = \operatorname{tg} x$$

$$(j) \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad F(x) = -\operatorname{cotg} x$$

**Ejercicio 3.** Calcule las siguientes primitivas

$$(a) \quad \int x^2 dx$$

$$(e) \quad \int \left( \frac{1}{x} + 2x - e^x \right) dx$$

$$(b) \quad \int x^{100} dx$$

$$(f) \quad \int x^{-\frac{1}{2}}(3x + \sqrt{x}) dx$$

$$(c) \quad \int \sqrt{x} dx$$

$$(g) \quad \int \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$$

$$(d) \quad \int (3x - \cos x + 2 \operatorname{sen} x) dx$$

$$(h) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} dx$$

**Ejercicio 4.** Aplicando el método de sustitución calcule las siguientes primitivas

$$(a) \quad \int 5 \cos(5x) dx$$

$$(j) \quad \int x(x^2 + 1)^{-1} dx$$

$$(b) \quad \int \cos(x + 5) dx$$

$$(k) \quad \int \cos x \operatorname{sen}^{-2} x dx$$

$$(c) \quad \int \operatorname{sen}(7x) dx$$

$$(l) \quad \int (5 - 2x)^{-1} dx$$

$$(d) \quad \int (t + 1)(t^2 + 2t + 3)^{\frac{2}{3}} dt$$

$$(m) \quad \int \cos^{-2}(2x) dx$$

$$(e) \quad \int e^{3x} dx$$

$$(n) \quad \int x^{-1} \cos(\ln x) dx$$

$$(f) \quad \int (x + 1)^{-1} dx$$

$$(\tilde{n}) \quad \int x(1 + 3x^2)^{-1} dx$$

$$(g) \quad \int x^{-1} \ln x dx$$

$$(o) \quad \int (1 + y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dy$$

$$(h) \quad \int (x + 1)^{-1} \ln(x + 1) dx$$

$$(p) \quad \int (x^2 + 2x + 5)^{-1} dx$$

$$(i) \quad \int x e^{x^2} dx$$

$$(q) \quad \int x(16 + x^4)^{-1} dx$$

**Ejercicio 5.** Calcule las siguientes primitivas aplicando el método de integración por partes.

$$(a) \quad \int x \operatorname{sen} x dx$$

$$(c) \quad \int x^3 \cos x dx$$

$$(b) \quad \int (x^2 - 2)e^{-x} dx$$

$$(d) \quad \int x \ln x dx$$

(e)  $\int x^2(x+4)^{-\frac{1}{2}} dx$

(h)  $\int \arccos x dx$

(f)  $\int (t^2+t)(t+1)^{-5} dt$

(i)  $\int e^x \cos x dx$

(g)  $\int \ln x dx$

(j)  $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) dx$

**Ejercicio 6.** Mediante la descomposición de funciones racionales en fracciones simples, calcule las primitivas de cada una de las siguientes funciones.

(a)  $f(x) = \frac{3x-2}{(x+2)(x+3)}$

(f)  $f(x) = (x^2-1)^{-2}$

(b)  $f(x) = 4(x-2)^{-1}(x-1)^{-1}$

(g)  $f(x) = \frac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x}$

(c)  $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-4}$

(h)  $f(x) = \frac{8x^3+7}{8(x+1)(x+\frac{1}{2})^2}$

(d)  $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2-1}$

(i)  $f(x) = \frac{2(2x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$

(e)  $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

(j)  $f(x) = \frac{3}{(x^2+2x+3)(x+2)}$

**Ejercicio 7.** Calcule las siguientes primitivas:

(a)  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+1}} dx$

(j)  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}} dx$

(b)  $\int x^{\frac{1}{2}} \ln x dx$

(k)  $\int x^5 \sqrt{5-x^2} dx$

(c)  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

(l)  $\int \operatorname{sen}^5\left(\frac{x}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{6}\right) dx$

(d)  $\int x \arccos x dx$

(m)  $\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$

(e)  $\int (1+\cos 2x)^{-2} \operatorname{sen} x dx$

(n)  $\int \ln(x^2+1) dx$

(f)  $\int \frac{(\operatorname{sen} x - 2) \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2} dx$

(ñ)  $\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{1-e^{2x}} dx$

(g)  $\int \frac{xe^{3x^2}}{4+e^{3x^2}} dx$

(o)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(h)  $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x) dx$

(p)  $\int \frac{\ln x + 1}{x(\ln^2 x - 3 \ln x)} dx$

(i)  $\int x(\operatorname{sen} x + \frac{x}{2} \cos x) \sqrt{x^2 \operatorname{sen} x} dx$

(q)  $\int (x^3+x) \cos(x^2+1) dx$

(r)  $\int \sqrt{e^x + 1} dx$

(t)  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$

(s)  $\int \frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

**Ejercicio 8.**

(a) Hallar  $f(x)$  tal que  $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)^3 \cos x$  y  $f(0) = 3$ .

(b) Hallar  $g(x)$  tal que  $g'(x) = t \operatorname{sen}(5t)$  y  $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

(c) Hallar  $h(x)$  tal que  $h'(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$  y  $h(3) = 0$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Sabemos que  $f$  tiene un punto crítico en  $x = 2$ , que el gráfico de  $f$  pasa por el punto  $(2;3)$  y que  $f'(x) = -x + a$  para cierto  $a \in \mathbb{R}$ . Hallar  $f(x)$ .

**Ejercicio 10.** Aplicando la Regla de Barrow, calcular

(a)  $\int_0^1 e^t dt$

(c)  $\int_0^x \cos t dt$

(e)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sen} t dt$

(b)  $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$

(d)  $\int_1^x t^r dt$  (donde  $x > 1$ )

**Ejercicio 11.** Sea  $a \in \mathbb{R}$  y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + a$ . Sabemos que  $x - 2$  es un factor de  $f$ .

(a) Determine  $a$  y factorice  $f(x)$  totalmente.

(b) Haga un gráfico aproximado de  $f(x)$ .

(c) Calcule  $\int_{-1}^2 f(x) dx$ ;  $\int_2^{2,5} f(x) dx$ ;  $\int_{-1}^{2,5} f(x) dx$ .

**Ejercicio 12.** Aplicando los métodos de sustitución e integración por partes calcule las siguientes integrales definidas.

(a)  $\int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2 + 1)^{-3} dx$

(e)  $\int_1^4 x^{-1} \cos(\ln x) dx$

(b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x)^{-2} \operatorname{sen}(2x) dx$

(f)  $\int_0^1 e^x(4 + 3e^x) dx$

(c)  $\int_3^7 x \ln x dx$

(g)  $\int_3^9 x\sqrt{x+1} dx$

(d)  $\int_0^2 (1+x^2)(x-1)^{\frac{2}{3}} dx$

(h)  $\int_0^1 e^x(e^{2x} + e^x + 1)^{-1} dx$

**Ejercicio 13.** Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) f_1(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$(e) f_5(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t} dt$$

$$(b) f_2(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$$

$$(f) f_6(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{2+t^2} dt$$

$$(c) f_3(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$$

$$(g) f_7(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2) dt$$

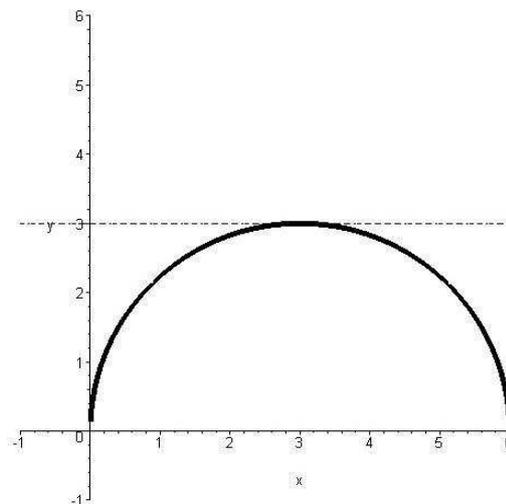
$$(d) f_4(x) = \int_2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t dt \quad \text{con } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(h) f_8(x) = \int_{\cos x}^{e^x} t^2 dt$$

**Ejercicio 14.** Determine los máximos y mínimos locales de la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4) dt$$

**Ejercicio 15.** Sea  $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, y sea  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Si el gráfico de  $F(x)$  es el que aparece a continuación



$$(a) \text{ Calcule } \int_0^6 f(t) dt.$$

$$(b) \text{ Verifique que } f(3) = 0.$$

$$(c) \text{ Verifique que } f(x) > 0 \text{ en } [0; 3), \text{ y } f(x) < 0 \text{ en } (3; 6].$$

$$(d) \text{ Demuestre que } \int_0^6 |f(t)| dt = 2 \int_0^3 f(t) dt = 6.$$

**Ejercicio 16.** Calcule el área de la región limitada por:

$$(a) \text{ La parábola } y = \frac{1}{2}x^2, \text{ el eje } x \text{ y las rectas } x = 1, x = 2.$$

(b) La recta  $y = -x + 5$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = 6$ ,  $x = 9$ .

**Ejercicio 17.** En cada caso, determine el área de la región encerrada por la curva, el eje  $x$  y las rectas verticales indicadas.

(a)  $y = x^3$ ,  $x = 2$ ,  $x = 5$ .

(b)  $y = x^2 - x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

(c)  $y = x + \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

**Ejercicio 18.** Determine  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que el área de la región encerrada entre el eje  $x$ , el gráfico de  $f(x) = \sin x$  y las rectas verticales  $x = 0$  y  $x = a$  sea  $\frac{5}{2}$ .

**Ejercicio 19.** Calcule el área de la región acotada limitada por las curvas dadas en cada caso

(a)  $y = 3x^2 - 7x$ ,  $y = x^2 + x - 6$

(b)  $y^2 = x$ ,  $x - y = 2$

(c)  $y = x^{1/3}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$

(d)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$

(e)  $y = x^{1/2}$ ,  $y = x - 2$ ,  $x = 0$

(f)  $y = x^2 - 1$ ,  $y = -x$

(g)  $y = x^3 - x$ ,  $y = x$

(h)  $y = x^3 - x$  y la recta tangente a dicha curva en  $x = 1$ .

(i)  $3y^2 - 3y = x - 1$ ,  $2y^2 - 2y = x - 3$

**Ejercicio 20.** Sean  $p(t)$  y  $v(t)$  la posición y la velocidad instantánea de una partícula de trayectoria rectilínea, cuya aceleración instantánea es  $a(t) = 4t - 16$  y tal que la posición inicial era  $p(0) = 0$ , y la velocidad inicial  $v(0) = 30$ .

(a) Determinar  $v(t)$  y verificar que la velocidad es nula para  $t = 3$ .

(b) Obtener la expresión de  $p(t)$  y calcular la posición para  $t = 3$ .

**Ejercicio 21.** Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante  $t$  está dada por  $a(t) = t(t - 100)$ . En el instante inicial el móvil estaba en la posición  $s_0$ , y su velocidad inicial era 25. ¿Cuál es la posición  $s(t)$  para  $0 < t < 100$ ?

**Ejercicio 22.** Una nave espacial está en reposo en el instante  $t = 0$ . Mediante mediciones en el interior de la nave se comprueba que recibe una aceleración instantánea  $a(t) = t^{1/2} + 1$  cuando  $t > 0$ , donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en  $m/s^2$ .

- (a) ¿Qué velocidad lleva la nave cuando pasaron 64 segundos desde el arranque?
- (b) ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

**Ejercicio 23.** El corredor  $H_1$ , que es especialista en los 100 metros llanos desarrolla una velocidad instantánea  $v_1(t) = 10(1 - e^{-3t})$  donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Un segundo corredor  $H_2$  tiene una velocidad instantánea  $v_2(t) = \frac{21}{2}(1 - e^{-t})$ .

- (a) ¿Qué distancia recorre cada corredor en los primeros 10 segundos de carrera?
- (b) ¿Y en los primeros 20 segundos?
- (c) ¿Cuál de los corredores ganaría una carrera de 100 metros?
- (d) ¿Y una carrera de 200 metros?