
ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN Cs. BIOLÓGICAS)

Curso de Verano 2009

Práctica 4: Derivadas

Notaciones: Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $a \in \mathbb{R}$ y un número $\Delta x \in \mathbb{R}$ que llamaremos incremento en x , se define el incremento en y por $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. La derivada de f respecto de x se notará indistintamente por f' , $D_x f$ o $\frac{df}{dx}$. Observar que se tiene entonces que $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, en el caso en que este límite exista.

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 4x + 7$ y $a = 3$.

- Para $\Delta x = 1, \frac{1}{2}, -1$, calcular la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. Graficar la función y las tres rectas secantes en un mismo gráfico.
- Dar una expresión (en función de h) de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ (donde $h \neq 0$).
- Calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ como límite de pendiente de rectas secantes.
- Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$.
- Repetir los items anteriores para $f(x) = 2 - x^3$ y $a = 1$.

Ejercicio 2. En una experiencia cuantitativa, la medición $f(t)$ realizada después de t horas está expresada por $y = f(t) = t^2 + 5t + 100$, donde $0 < t < 24$. Si evaluamos esta magnitud cerca de $t_1 = 3$ para $\Delta t \neq 0$, determine Δy y el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Luego calcule la velocidad instantánea de crecimiento de y en $t_1 = 3$.

Ejercicio 3. En cierta reacción química la cantidad de moles de moléculas de cierto compuesto (en función del tiempo) está dada por $y = g(t) = -t^2 + 10t - 3$, donde t es el tiempo transcurrido desde que se inició la reacción y $0 < t < 9$. Encuentre la velocidad instantánea de cambio de y respecto de t en $t_0 = 3$.

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes funciones, calcule (si existe) la derivada en los puntos indicados usando la definición.

(a) $f(x) = x^2 + 1$, en $x = 1$ y $x = -2$.

(b) $g(x) = x^3 + 2$, en $x = 1$ y $x = -2$.

(c) $h(x) = \sqrt{2x-1}$, en $x = 5$ y $x = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 5.

(a) Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Determine $f'(a)$ para $a \neq 0$.

(b) Sea $g(x) = e^{-x}$. Calcule $g(0) + g'(0)$.

(c) Sean $h(x) = 3 - x$ y $m(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$. Calcule $\frac{m'(1)}{h'(1)}$.

Ejercicio 6. Calcule, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2 + 1$

(f) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = x^3$

(g) $f(x) = \sin x$

(c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$

(h) $f(x) = \cos x$

(d) $f(x) = \frac{3}{x+4}$

(i) $f(x) = e^x$

(e) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

(j) $f(x) = \ln x$

Ejercicio 7.

(a) Dada la función $f(x) = |x| + x$, calcular $f'(1)$ y $f'(-2)$. ¿Existe $f'(0)$?

(b) Dada la función $g(x) = x \cdot |x|$, calcular $g'(1)$ y $g'(-2)$. ¿Existe $g'(0)$?

(c) Determinar $g'(x)$.

Ejercicio 8. Dadas las siguientes funciones con dominio y codominio \mathbb{R} :

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que las tres funciones son continuas en $x = 0$.

(b) Realice los gráficos de estas funciones.

(c) Demuestre que f y g no son derivables en $x = 0$.

(d) Estudiar la derivabilidad de $h(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio 9. Calcule $\frac{df}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación.

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(j) $f(x) = \frac{2 + \cos x}{3 + \operatorname{sen} x}$

(b) $f(x) = (x + 2)(x + 3)(3x + 1)(2 + 5x^2)$

(k) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{x^2 + 1}$

(c) $f(x) = 7 \cos x + 5 \operatorname{sen} x + xe^x$

(l) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{x \ln x}$

(d) $f(x) = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2)e^x$

(m) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \operatorname{sen} x$

(e) $f(x) = e^x \cos x + \ln 3$

(f) $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{3} + e^x$

(n) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

(g) $f(x) = x(3 + x^2) + \ln 2$

(ñ) $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$

(h) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(o) $f(x) = \frac{x + e^x}{5 - x} + \operatorname{tg} x$

(i) $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

(p) $f(x) = (\ln x \log_a x) - (\ln a \log_a x)$

Ejercicio 10. Una bola de radio r tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y superficie $S(r) = 4\pi r^2$.

(a) Demuestre que $S(r) = \frac{dV}{dr}$.

(b) Halle una relación análoga entre el área de un círculo de radio r y la longitud de su circunferencia.

Ejercicio 11. Un tanque cilíndrico de 2m de radio se está llenando a razón de 1 m^3 cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el tanque, si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

Ejercicio 12. Calcule $D_x f$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando la regla de la cadena, es decir la propiedad de derivación de las funciones compuestas.

(a) $f(x) = (1 + x)^{129}$

(h) $f(x) = e^{x^2+3x}$

(b) $f(x) = \cos(3x)$

(i) $f(x) = \ln(e^x + \operatorname{sen} 5x)$

(c) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

(j) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

(d) $f(x) = \operatorname{tg}(5x^5)$

(k) $f(x) = 3^{\cos x} + \operatorname{sen}^2 x$

(e) $f(x) = \ln(x^5)$

(l) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} - 3\pi e^{\operatorname{tg} x}$

(f) $f(x) = 3 \operatorname{sen}^4 x$

(g) $f(x) = \ln^5 x$

(m) $f(x) = (a + bx^4)^{\frac{1}{3}}$

$$(n) f(x) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(p) f(x) = (3 \cos^3 x)^{-1} - (\operatorname{sen}(\ln x))^{-1}$$

$$(\tilde{n}) f(x) = 3^{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}} + \frac{\operatorname{sen}^3(ax)}{3 \cos(bx)}$$

$$(q) f(x) = 3 \operatorname{sen}^5(x^3) + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$$

$$(r) f(x) = [\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \ln x)]^{\frac{1}{4}}$$

$$(o) f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2)) + (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} - e^{\cos(2x)}$$

$$(s) f(x) = \operatorname{sen}^3(\ln \sqrt{x}) \cos^2(e^{3x} + 1)$$

Ejercicio 13.

(a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x$. Calcular $(f^{-1})'(0)$ y $(f^{-1})'(2)$.

(b) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{11} + x^9 + 2x^3 + 2x + 5$. Calcular $(f^{-1})'(5)$.

Ejercicio 14. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \arcsin x$$

$$(d) f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

$$(b) f(x) = \arccos x$$

$$(e) f(x) = \arcsin \sqrt{x}$$

$$(c) f(x) = \arctan x$$

$$(f) f(x) = \ln(\arccos x)$$

Ejercicio 15. Usando el método de derivación logarítmica calcule las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = x^{3x}$$

$$(f) f(x) = \sqrt[x]{x}$$

$$(b) f(x) = (\sqrt{x+1})^x$$

$$(g) f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x^2}$$

$$(c) f(x) = (\ln x)^x$$

$$(h) f(x) = (\ln x)^{x^2+x}$$

$$(d) f(x) = (\ln x)^{\ln x}$$

$$(i) f(x) = (\operatorname{sen}^3 x)^{\ln x}$$

$$(e) f(x) = (\cos x)^{e^x}$$

$$(j) f(x) = x^{(x^x)}$$

Ejercicio 16. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = x^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\operatorname{sen} 3x}$$

$$(b) f(x) = x[(\operatorname{sen} x)^{x^2} + \pi e^x]$$

$$(c) f(x) = \frac{x e^{(\sqrt[3]{x} + \cos x - 1)}}{\operatorname{sen} x + \ln(x^2 + e)} + (\cos x)^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{2})^\pi$$

Ejercicio 17. Dos móviles se desplazan con trayectoria rectilínea con las siguientes leyes del movimiento (donde t representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 10$$

$$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 2$$

- (a) Determine el instante t_0 en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.
- (b) Calcule la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

Ejercicio 18. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 34,3 m/s se desplaza siguiendo la ley de movimiento $s(t) = 34,3t - 4,9t^2$.

- (a) Calcule la velocidad y la aceleración en los instantes $t_1 = 3$ y $t_2 = 4$.
- (b) Determine el instante t_3 en el que la piedra alcanza la altura máxima. (Pista: la velocidad en el instante t_3 debe ser 0.)

Ejercicio 19. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso :

- (a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $a = 1$, $a = 0$ (e) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $a = 0$
- (b) $f(x) = \sin x$ en $a = \frac{\pi}{2}$ (f) $f(x) = (\sqrt{x} + x)^2$ en $a = 4$
- (c) $f(x) = \ln x$ en $a = 1$ (g) $f(x) = e^{-x^2}$ en $a = 0$, $a = 1$
- (d) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ en $a = 2$ (h) $f(x) = e^x(x + \ln x)$ en $a = 1$

Ejercicio 20. Consideremos las funciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$.

- (a) Probar que los gráficos de ambas funciones se cortan en dos puntos.
- (b) Verificar que en uno de esos puntos de intersección ambas curvas tienen la misma recta tangente. ¿Qué pasa en el otro punto de intersección?

Ejercicio 21. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. El gráfico de la función $A(x) = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ se conoce como 'curva de Agnesi'. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto de abscisa $x_0 = 2a$.

Ejercicio 22. Determine en qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la recta L que une los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3$ y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función de la que sólo sabemos que $g'(2) = 4$. Calcular la derivada de $(g \circ f)$ en el punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 24. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(g(x^2 + x)) + 3g(x) = 3\operatorname{tg}(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y donde g cumple, además, que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 2$.

(a) Calcular $f'(0)$.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

Ejercicio 25. El 'Teorema del coseno' permite expresar la longitud del lado a del triángulo $\triangle ABC$ a partir de los otros dos lados y el ángulo opuesto A por la fórmula:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Si mantenemos b y c constantes, a resulta ser función del ángulo A . En estas condiciones, demuestre que $\frac{da}{dA} = h_a$ es precisamente la altura del triángulo correspondiente a la base a .

Ejercicio 26. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

(a) Analice la continuidad de f en $x = 2$.

(b) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudie la derivabilidad de f en $x_1 = 1$ y en $x_2 = 2$.

Ejercicio 27. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq -1 \\ \frac{\cos(x\pi)}{\pi} & x > -1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = |(x-1) \cdot (x+1)|$$

$$(h) f(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sen}(4|x|)$$

Ejercicio 28. Hallar todos los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que existe $f'(1)$ si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 29. Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$

(d) $f(x) = (x^2 + 1)^5$

(b) $f(x) = \ln(7x)$

(e) $f(x) = \text{sen}(4x)$

(c) $f(x) = e^{-x}$

(f) $f(x) = \cos(2x^3)$

Ejercicio 30.

(a) Calcule las derivadas séptima y octava de $f(x) = x^7 - 5x^4 + 8x$.

(b) Calcule las derivadas de orden n y $n + 1$ de un polinomio de grado n .

(c) Calcule la derivada octava de $f(x) = \text{sen } x$. ¿Qué conclusiones obtiene? ¿Cómo calcularía la derivada de orden 25 de $f(x)$?

(d) Lo mismo que en el item (c) pero para $g(x) = \cos x$.