1 Análisis Multivariado - Práctica 1

1.1 Álgebra de matrices

1. Probar que $tr\,(A+B) = tr\,(A) + tr\,(B)$ y $tr\,(AB) = tr\,(BA)$.

2. Mostrar que los autovalores no nulos de AB coinciden con los de $B\dot{A}$. (Si las matrices son cuadradas, los nulos también coinciden).

3. Sea A una matriz simétrica de $d \times d$.

   (a) Probar que todos sus autovalores son reales. Si llamamos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_d$ a estos autovalores, mostrar que:

   - $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$
   - $|A| = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i$
   - $|I \pm A| = \prod_{i=1}^{d} (1 \pm \lambda_i)$

   (b) $A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \ \ \forall i$.

   (c) $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \ \ \forall i$.

   (d) $A \geq 0$ y $|A| \neq 0 \Rightarrow A > 0$.

   (e) $A > 0 \Rightarrow A^{-1} > 0$.

   (f) $A > 0 \Leftrightarrow$ existe $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ no singular tal que $A = RR' \Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tal que si $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ con $\lambda_i > 0 \quad \forall i$ entonces $A = B\Lambda B'$ (es lo que se denomina *descomposición espectral* de A).

   (g) $A \geq 0$ de rango $r \Leftrightarrow$ existe $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ de rango r tal que $A = RR' \Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tal que si $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ con $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$ entonces $A = B\Lambda B'$.

4. Una matriz P de $d \times d$ se dice *de proyección* si es simétrica e idempotente (es decir, $P^2 = P$). Probar que:

   (a) $rg\,(P) = r \Leftrightarrow \lambda_i = 1$ para $i = 1, \ldots, r$ y $\lambda_i = 0$ para $i = r+1, \ldots, d$. Entonces $P = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i'$ para ciertos $\mathbf{t}_i$ ortonormales. ¿Cómo queda la descomposición espectral en este caso?

   (b) $rg\,(P) = tr\,(P)$.

   (c) $I - P$ también es de proyección. ¿Qué rango tiene?¿Sobre qué espacio proyecta?

5. Sea X de $n \times p$ y de rango p. Mostrar que $P = X\,(X'X)^{-1}\,X'$ es una matriz de proyección. ¿Sobre qué espacio proyecta?

1.2 Esperanza, varianza y covarianza de vectores aleatorios

1. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores aleatorios (no necesariamente de la misma dimensión) probar que:

   (a) $\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}\mathbf{y}') - \mathcal{E}(\mathbf{x})\,\mathcal{E}(\mathbf{y}')$.

   (b) $\mathcal{C}(A\mathbf{x},B\mathbf{y}) = A\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,B'$.

   (c) Si $\mathbf{a}$ es un vector no aleatorio, $\mathcal{D}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathcal{D}(\mathbf{x})$.

   (d) $\mathcal{D}(A\mathbf{x}) = A\mathcal{D}(\mathbf{x})\,A'$.

2. Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una muestra de vectores aleatorios de dimensión d (m.a.) con dispersión Σ y $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}, \{b_i\}_{1\leq i\leq n}$ escalares no aleatorios. Mostrar que:

   (a) $\mathcal{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\Sigma.$

   (b) $\mathcal{C}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i, \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\mathbf{x}_j\right) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i = 0.$

3. Si $\mathbf{x}\sim(\mu,\Sigma)$ y A es simétrica, probar que $\mathcal{E}(\mathbf{x}'A\mathbf{x}) = tr\,(A\Sigma) + \mu'A\mu$.

4. Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una m.a. (μ,Σ). Mostrar que:

   (a) $\mathcal{E}(\bar{\mathbf{x}}) = \mu$ y $\mathcal{D}(\bar{\mathbf{x}}) = \Sigma/n$.

   (b) $\mathcal{E}(Q) = (n-1)\,\Sigma$, con $Q = \sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})'$

1.3 Distribución Normal Multivariada

1. (a) Sean $\mathbf{y}_i\sim N_d(\mu_i,\Sigma_i)$ independientes $(1\leq i\leq n)$. Probar que $\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{y}_i \sim N_d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Sigma_i\right)$. (Sugerencia: usar la distribución normal univariada).

   (b) Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una m.a. $N_d(\mathbf{0},\Sigma)$. Llamemos $X' = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\in\mathbb{R}^{d\times n}$.

   i. Si $\mathbf{a}$ de $n\times 1$ es un vector no aleatorio, entonces $X'\mathbf{a}\sim N_d\left(\mathbf{0},\|\mathbf{a}\|^2\,\Sigma\right)$.

   ii. Si $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r\}$ es un conjunto de vectores ortogonales no aleatorios, entonces los vectores aleatorios $\mathbf{u}_i = X'\mathbf{a}_i$ $(1\leq i\leq r)$ son independientes.

   iii. Si $\mathbf{b}$ de $d\times 1$ es un vector no aleatorio, entonces $X\mathbf{b}\sim N_n(\mathbf{0},(\mathbf{b}'\Sigma\mathbf{b})\,I_n)$. En particular, $\mathbf{x}^{(j)}\sim N_n(\mathbf{0},\sigma_{jj}I_n)$, con $\Sigma = (\sigma_{ij})$.

Definición: Si las variables aleatorias $X_1,X_2,...,X_n$ son i.i.d. $N_1(\mu_i,\sigma^2)$, entonces

$$U = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi_n^2(\delta)$$

es decir que la distribución de la variable aleatoria U se denomina χ^2 *no central* con parámetro de centralidad $\delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2}{\sigma^2}$.

1. Consideremos $\mathbf{x} \sim N_d(\mu, \Sigma)$.

   (a) Probar que $\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x} \sim \chi_d^2(\delta)$ con $\delta = \mu'\Sigma^{-1}\mu$.

   (b) Si B es simétrica de rango k y $B\Sigma$ es idempotente, probar que $\mathbf{x}'B\mathbf{x} \sim \chi_k^2(\delta)$ con $\delta = \mu' B\mu$.

1.4 Distribución Wishart

En los 4 ejercicios siguientes supondremos que $W \sim \mathcal{W}_d(m, \Sigma)$.

1. Probar que $\mathcal{E}(W) = m\Sigma$.

   (a) Si $\mathbf{b}$ de $d \times 1$ es un vector de constantes, $(\mathbf{b}'W\mathbf{b}) / (\mathbf{b}'\Sigma\mathbf{b}) \sim \chi_m^2$.

   (b) En particular, si $\mathbf{b} = \mathbf{e}_i$ el vector canónico i-ésimo, resulta $w_{jj}/\sigma_{jj} \sim \chi_m^2$.

2. Si $C \in \mathbb{R}^{q\times d}$ es una matriz no aleatoria de rango q, entonces $CWC' \sim \mathcal{W}_q(m, C\Sigma C')$.

3. Si se parten las matrices W y Σ de la siguiente manera:

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

   con W_{11} y Σ_{11} cuadradas y de la misma dimensión y si $\Sigma_{12} = \mathbf{O}$, entonces W_{11} y W_{22} tienen distribución Wishart y son independientes. Hallar los parámetros correspondientes.

4. Si W_1 y W_2 son independientes y $W_i \sim \mathcal{W}_d(m_i, \Sigma)$, entonces $W_1+W_2 \sim \mathcal{W}_d(m_1 + m_2, \Sigma)$.