ANALISIS NUMERICO — Práctica 4

2^{do} Cuatrimestre 2004

Ejercicio 1 Dar dos ejemplos de formas bilineales ($a_{i,j}$) diferentes, que corresponden a formas variacionales distintas, pero den lugar al mismo operador diferencial.

Ejercicio 2 Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Sea T_h una subdivisión de Ω en elementos K (intervalos en $\mathbb{R}$, triángulos o cuadriláteros en $\mathbb{R}^2$, tetraedros en $\mathbb{R}^3$). Probar que una función definida en todo Ω y que es polinomial en cada elemento, pertenece a $H^1(\Omega)$ si y sólo si es continua en Ω.

Ejercicio 3 Encontrar la dimensión de los siguientes espacios de funciones, definidas sobre un elemento K en $\mathbb{R}^2$:

i) funciones lineales

ii) funciones cuadráticas

iii) $P_r(K) = \{v \ : \ v$es un polinomio de grado $\leq r$ sobre $K\}$

iv) funciones bilineales ($v = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$).

Ejercicio 4 Sea C_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, una subdivisión de Ω en triángulos que no se superponen, y tal que los vértices de ningún triángulo se encuentran sobre los lados de otro triángulo).

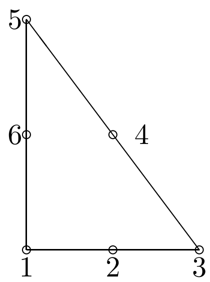
i) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, lineales en cada triángulo de C_h. Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω). Verificar que la función resulta continua.

ii) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, cuadráticas en cada triángulo de C_h. Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por ejemplo por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω) y en el punto medio de cada lado de los elementos de C_h.

Ejercicio 5 Sea T_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, cuadráticas en cada triángulo de T_h.

i)Explicar como elegiría los nodos en cada triángulo para garantizar que una función en V_h está unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

ii) Considere ahora el triángulo de referencia y los nodos n_j, $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i, $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



Ejercicio 6 Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, con lados paralelos a los ejes. Considerar una subdivisión C_h de Q en subrectángulos que no se solapan tal que ningún vértice de ningún rectángulo pertenece al lado de otro rectángulo. Sea V_h el conjunto de funciones continuas definidas en Q, bilineales en cada subrectángulo. Probar que un elemento de V_h está unívocamente determinado por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los nodos en el borde de Q).

Ejercicio 7 Probar que las normas

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}$$

y

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Verificar que la norma de H^1 se deriva de un producto escalar.

Ejercicio 8 Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, tal que:

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 9 Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1, tal que:

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

i) Defina solución clásica y débil para este problema.
ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
iii) Probar que existe una solución única en $H^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 10 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$ que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\chi_i\chi_j \geq \alpha|\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0$$

Sea también $a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$. Se busca una función $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

i) Defina solución clásica y débil para este problema.
ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
iii) Probar que para $a_0(x) \geq 0$ en Ω y $f \in L^2$ existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 11 Consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio con borde poligonal, y T_h una triangulación del mismo. Sea $K \subset T_h$ un triángulo de la partición. Llamamos:
$h_K =$ mayor de los lados de K,
$\rho_K =$ diámetro del círculo inscripto en K,
$h = \max\limits_{K \in T_h} h_K$.
Probar que la condición $\dfrac{h_K}{\rho_K} \leq \beta \quad \forall K \in T_h$ es equivalente a que exista $\theta_0 > 0$ tal que para cualquier ángulo θ de cualquier triángulo $K \in T_h$ se tiene $\theta \geq \theta_0$.

Ejercicio 12 Considere el siguiente problema en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\triangle u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donde β_1 y β_2 son constantes en $\mathbb{R}$ y $f \in L^2(\Omega)$.

i) Hallar la forma debil en un espacio adecuado V.

ii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.
Sug. : Para ver la coercividad verifique que:

$$\int_\Omega (\beta_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial y}).v = 0, \forall v \in V$$

Ejercicio 13 Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x}$$

donde $\hat{T}$ es el triángulo de referencia como se muestra en la Figura 1. Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{2} f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

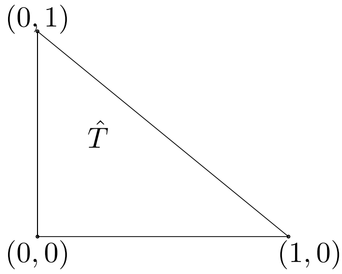


Figura 1

Ejercicio 14 Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{6}(f(\frac{1}{2}, 0) + f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 15 Sea T un triángulo genérico de vertices a_1, a_2, a_3 como muestra la Figura 2.

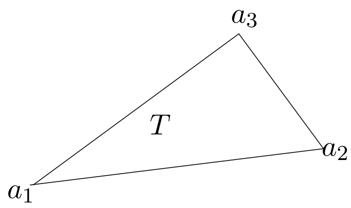


Figura 2

Sea $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ la transformación afín que manda $\hat{T}$ en T. Usando el ejercicio 13 y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim |T| f(a_{123})$$

donde a_{123} es el baricentro del triángulo T, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 16 Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 14, mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{3}(f(a_{12}) + f(a_{13}) + f(a_{23}))$$

donde $a_{ij}, i < j$ denota el punto medio del lado de vértices a_i y a_j, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2. (ver Figura 3)

Ejercicio 17 En forma análoga a los ejercicios previos mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{60}(3\sum_{i=1}^{3} f(a_i) + 8 \sum_{1\leq i<j\leq 3} f(a_{ij}) + 27 f(a_{123}))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3. (ver Figura 3)

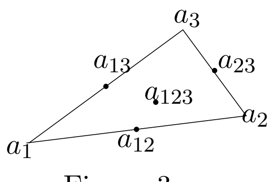
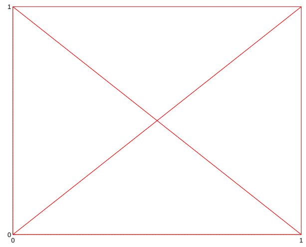


Figura 3

Ejercicio 18 Considerar la siguiente triangulación del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Considere una numeración de los nodos en sentido antihorario de afuera hacia adentro ,i.e, $N_1 = (0,0), \cdots, N_5 = (0{,}5, 0{,}5)$. Hallar las matrices locales y la matriz de rigidez que resultan al resolver el problema del ejercicio 9 usando elementos finitos lineales.



Ejercicio 19 Hacer un programa para resolver la ecuación de Poisson $-\triangle u = f$ en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ usando elementos finitos (triangulando el dominio y utilizando elementos lineales). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h.