

# ANALISIS NUMERICO

## Práctica 0

2<sup>do</sup> Cuatrimestre 2005

**Ejercicio 1** Hallar el error local y el orden de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función  $u$ :

- i.  $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$  (forward difference)
- ii.  $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$  (backward difference)
- iii.  $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$  (diferencias centradas)
- iv.  $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

**Ejercicio 2** Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicita sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

**Ejercicio 3** Hallar una fórmula de aproximación para la derivada segunda que utilice los valores de  $f$  en  $x, x+h$  y  $x+2h$ . ¿Cuál es el error local?.

### Para hacer en Matlab:

**Ejercicio 4** Dado el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, y(1) = 0$$

resolver usando diferencias finitas.

- Usando la discretización habitual para la derivada segunda y diferencias centradas para la aproximación de la primer derivada.
- Usando la discretización de la derivada segunda del ejercicio anterior y la discretización de la derivada primera dada en el ejercicio 1 iv).

Compare la solución obtenida numericamente con la exacta para varios valores del paso  $h$  de la discretización, y grafique los errores.

**Ejercicio 5** Resuelva analítica y numéricamente el siguiente problema de contorno:

$$y'' - y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

Utilice un método de diferencias finitas para hallar las soluciones numéricas. Compare la solución obtenida con la exacta para varios valores del paso  $h$  de la discretización, y grafique los errores.

**Ejercicio 6** Si  $\epsilon > 0$ , considere el problema

$$-\epsilon u'' - u' = 0 \quad u(0) = 0, u(1) = 1.$$

- i. Discretice la ecuación usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y obtenga explícitamente la solución discreta (en función de  $h$  y  $\epsilon$ ).
- ii. Para distintos valores de  $\epsilon$  y  $h$ , compare las gráficas de las soluciones discreta y exacta. ¿Qué ocurre si  $h \gg 2\epsilon$ ?

**Ejercicio 7** Repita el ejercicio 6, pero ahora discretice usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

### Ecuaciones de recurrencia:

**Ejercicio 8** Hallar la solución general de las sig. ecuaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned}y(i+2) - y(i+1) - 2y(i) &= 0 \\y(i+3) - 6y(i+2) + 12y(i+1) - 8y(i) &= 0 \\y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) &= 0\end{aligned}$$

### Normas de matrices y radio espectral:

**Ejercicio 9** Probar que el módulo del mayor autovalor de una matriz cuadrada  $A$  no puede ser mayor que la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila o columna (Teorema de Gerschgorin).

**Ejercicio 10** Sea  $A$  una matriz cuadrada, y  $P_s$  la suma de los módulos de los elementos de la  $s$ -ésima fila, excluyendo el elemento  $a_{ss}$ . Probar que todo autovalor de  $A$  satisface (Teorema de Brauer)

$$|\lambda - a_{s,s}| \leq P_s$$

para algún  $s$ .

**Ejercicio 11** Probar que la norma infinito de una matriz es igual a la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila.

**Ejercicio 12** Demostrar que para cualquier norma matricial  $\|\cdot\|$  subordinada a una norma vectorial  $\rho(A) \leq \|A\|$  donde  $\rho(A)$  es el radio espectral de  $A$ .

Mostrar una matriz  $A$  y una norma  $\|\cdot\|$  para la cual  $\rho(A) \leq 1$  y sin embargo  $\|A\| > 1$

**Ejercicio 13** Sea  $A$ , tal que sus autovectores forman una base. Muestre una norma  $\|\cdot\|$  subordinada a una norma vectorial tal que  $\rho(A) = \|A\|$

**Ejercicio 14** (\*) Demostrar que los autovalores de la matriz tridiagonal de  $N \times N$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & & \\ c & a & b & 0 & \cdots & \\ 0 & c & a & b & \cdots & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & c & a & b & \\ 0 & \cdots & 0 & c & a & \end{pmatrix}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son reales o complejos, son  $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}} \cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right)$ ,  $s = 1, \dots, N$ .  
Sug.: Hallar la ecuación de recurrencia que satisfacen los autovectores.