ANALISIS NUMERICO

Práctica 0

2^{do} Cuatrimestre 2006

Clasificación de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Ejercicio 1 Verificar que los siguientes sistemas de primer orden son elípticos.

i. $\begin{cases} u_t + 2u_x - v_x = 0 \\ v_t - u_x + v_x = x \end{cases}$

ii. $\begin{cases} u_t + x^2 u_x + x v_x = xt \\ v_t + x u_x + t^2 v_x = t \end{cases}$

Ejercicio 2 Hallar las regiones donde la ecuación

$$(\alpha + x)\, u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$$

es hiperbólica, elíptica o parabólica. Estudiar su dependencia del parámetro $\alpha \in R$

Ejercicio 3 Si $K(t, x, u)$ es una función positiva, acotada y suficientemente derivable, y $C\,(t, x)$ es una función derivable que conserva el signo, analizar qué tipo de ecuación es

$$u_t = \left(K\,(t, x, u)\, u_x\right)_x + \left(C\,(t, x)\, u\right)_x$$

Analizar en particular qué sucede si $K = K\,(t, x)$.

Ejercicio 4 En cada una de las siguientes ecuaciones

1. $u_{tt} + tu_{xx} = 0$
2. $x^2 u_{tt} - t^2 u_{xx} = 0$
3. $x^2 u_{tt} + 2xtu_{tx} + t^2 u_{xx} = 0$
4. $u_{tt} + xu_{xx} + \frac{1}{2} u_x = 0$

Analice

i. Qué tipo de ecuación es en cada una de las regiones que quedan determinadas.

ii. Cuál es su forma canónica en cada uno de los dominios donde su tipo se conserva

Discretización de derivadas

Ejercicio 5 Hallar el error local y el orden de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u:

i. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (forward difference)

ii. $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (backward difference)

iii. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)

iv. $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

Ejercicio 6 Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicite sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejercicio 7 Hallar una fórmula de aproximación para la derivada segunda que utilice los valores de f en $x, x+h$ y $x+2h$. ¿ Cuál es el error local?.

Para hacer en Matlab:

Ejercicio 8 Dado el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1, y(1) = 0$$

resolver usando diferencias finitas.

- Usando la discretización habitual para la derivada segunda y diferencias centradas para la aproximación de la primer derivada.
- Usando la discretización de la derivada segunda del ejercicio anterior y la discretización de la derivada primera dada en el ejercicio 1 iv).

Compare la solución obtenida numericamente con la exacta para varios valores del paso h de la discretización, y grafique los errores.

Ejercicio 9 Resuelva analítica y numéricamente el siguiente problema de contorno:

$$y'' - y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

Utilice un método de diferencias finitas para hallar las soluciones numéricas. Compare la solución obtenida con la exacta para varios valores del paso h de la discretización, y grafique los errores.

Ejercicio 10 Si $\epsilon > 0$, considere el problema

$$-\epsilon u'' - u' = 0 \qquad u(0) = 0, u(1) = 1.$$

i. Discretice la ecuación usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y obtenga explícitamente la solución discreta (en función de h y ϵ).

ii. Para distintos valores de ϵ y h, compare las gráficas de las soluciones discreta y exacta. ¿Qué ocurre si $h >> 2\epsilon$?

Ejercicio 11 Repita el ejercicio 10, pero ahora discretice usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Ecuaciones de recurrencia:

Ejercicio 12 Hallar la solución general de las sig. ecuaciones de recurrencia:

$$y(i+2) - y(i+1) - 2y(i) = 0$$
$$y(i+3) - 6y(i+2) + 12y(i+1) - 8y(i) = 0$$
$$y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 0$$

Normas de matrices y radio espectral:

Ejercicio 13 Probar que el módulo del mayor autovalor de una matriz cuadrada A no puede ser mayor que la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila o columna (Teorema de Gerschgorin).

Ejercicio 14 Sea A una matriz cuadrada, y P_s la suma de los módulos de los elementos de la s-ésima fila, excluyendo el elemento a_{ss}. Probar que todo autovalor de A satisface (Teorema de Brauer)

$$|\lambda - a_{s,s}| \leq P_s$$

para algún s.

Ejercicio 15 Probar que la norma infinito de una matriz es igual a la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila.

Ejercicio 16 Demostrar que para cualquier norma matricial $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial $\rho(A) \leq |||A|||$ donde $\rho(A)$ es el radio espectral de A.

Mostrar una matriz A y una norma $||.||$ para la cual $\rho(A) \leq 1$ y sin embargo $||A|| > 1$

Ejercicio 17 Sea A, tal que sus autovectores forman una base. Muestre una norma $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = |||A|||$

Ejercicio 18 (*) Demostrar que los autovalores de la matriz tridiagonal de $N \times N$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \\ c & a & b & 0\cdots & \\ 0 & c & a & b & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son reales o complejos, son $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\, cos(\frac{s\pi}{N+1})$, $s = 1, \cdots, N$.
Sug.: Hallar la ecuación de recurrencia que satisfacen los autovectores.