

ANÁLISIS NUMÉRICO — Práctica 3

2^{do} Cuatrimestre 2006

Ejercicio 1 i) Probar que la función definida como $h(x) = \exp(-1/x^2)$ para $x > 0$, $h(x) = 0$ para $x \leq 0$, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$.

ii) Probar que la función $g(x) = h(x-a)h(b-x)$, $a < b$ es $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[a, b]$.

iii) Construir una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en una bola o en un intervalo.

Ejercicio 2 Sea $I = (-1, 1)$. Comprobar que:

i) La función $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y que $u' = H$, donde H es la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

ii) La función $H \notin W^{1,p}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 3 i) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg \, dx = 0$ para toda $g \in L^2(I)$. Probar que $f = 0$ p.p.

ii) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg \, dx = 0$ para toda $g \in C_0^k(I)$. Probar que $f = 0$ p.p.

iii) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg \, dx = 0$ para toda $g \in C_0^\infty(I)$. Probar que $f = 0$ p.p.

Ejercicio 4 1. Demuestre que si $f, g \in L^p$ son tales que $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces g es única.

2. Si la $f \in L^p$ del ítem previo es derivable entonces $f' = g$.

Ejercicio 5 1. Considere una función $\psi \in C_0^0(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$ pruebe que $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$ para todo $\omega \in C_0^1(I)$, además $\int_I \theta = 0$.

2. Si $I = (a, b)$, defina $\phi(x) = \int_a^x \theta$ y pruebe que $\phi(x) \in C_0^1(I)$, más aún $\phi' = \theta$.

3. Si f en L_{loc}^1 y $\int_I f\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces $f = cte$ en casi todo punto.
(Sug.: tome ϕ como en el ítem previo y utilice el Ejercicio 3)

Ejercicio 6 Si $g \in L_{loc}^1(I)$ tome $c \in I$ cualquiera, y escriba para $x \in I$ $\int_c^x g = v(x)$, entonces $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$ para todo $\phi \in C_0^1(I)$.

Ejercicio 7 Utilizando el ejercicio previo y tomando f y g como en el ejercicio 4 deduzca la identidad $f(x) = f(c) + \int_c^x g$ para casi todo x .

Ejercicio 8 Utilizando el ejercicio previo demuestre que si $f \in H^1(I)$ entonces $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

Ejercicio 9 Usando el ejercicio previo demuestre que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a, b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Pruebe utilizando este hecho que para I acotado en $\mathbb{R}$ existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \quad \text{Desigualdad de Poincaré}$$

y por ende

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

Ejercicio 10 Sea

$$u(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^\epsilon}$$

con $0 < \epsilon < 1$ y $(x, y) \in B_R(0)$.

Probar que u tiene derivadas generalizadas de primer orden en $L^2(B_R(0))$; $u \in H^1(B_R(0))$ pero u no tiene representante continuo en $B_R(0)$.

Ejercicio 11 i) Demuestre que la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{1}{3}}$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ donde $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.

ii) Para que valores de α la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^\alpha$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$?.

Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del ej. 8 no se extiende a más dimensiones.

Notación: Designaremos con $V = \{v : v \text{ es una función continua definida en } [0, 1], \text{ que tiene derivada } v' \text{ continua a trozos y acotada en } [0, 1], \text{ y que satisface } v(0) = v(1) = 0\}$.

Notaremos $\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv \, dx$.

Llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno para la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde f es una función continua dada.

Con (M) designaremos al problema de minimización:

Hallar $u \in V$ tal que $F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V$

y con (V) llamaremos al problema variacional:

Encontrar $u \in V$ tal que $\langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$.

En todos los casos $F(v) = \frac{1}{2} \langle v', v' \rangle - \langle f, v \rangle$.

Ejercicio 12 Probar que si w es continua en $[0, 1]$ y $\int_0^1 wv \, dx = 0 \quad \forall v \in V$, entonces $w(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

Ejercicio 13 Probar que si u satisface el problema (V), y u'' existe en el sentido habitual y es continua, u es también solución del problema (D).

Ejercicio 14 Demuestre que las siguientes formas bilineales son continuas y coercivas en los respectivos espacios V

1. $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A definida positiva.
2. $V = L^2(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0, 1]$.
3. $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0, 1]$.
4. $V = H_0^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0, 1]$.
5. $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los ítems previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?.

Ejercicio 15 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

- i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
- iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.
- v) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\bar{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 16 Realizar el análisis del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

con α y $\beta \in \mathbb{R}$, y f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 17 Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 18 Considerar el problema de contorno:

$$-u'' + ku' + u = f \quad \text{en } [0, 1] \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

Hallar una formulación variacional, y probar que para k suficientemente pequeño el problema variacional tiene solución única. Hallar un valor de k tal que $a(v, v) = 0$ pero $v \neq 0$ para algún $v \in H^1$.

Ejercicio 19 Probar que el espacio vectorial V de las poligonales con vértices en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\phi, \psi) = \sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$.

Ejercicio 20 Considere una partición uniforme del intervalo $(0, 1)$, $\bigcup_1^N I_i = (0, 1)$. Construya el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 15, 17, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in C^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es lineal en cada } I_i\}$$

definiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

Ejercicio 21 Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que $\langle u', v' \rangle = \langle 1, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(I)$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|u - u_h\|_{L^2}$, y $\|u - u_h\|_{H^1(I)}$ (donde u es la solución clásica), y graficarlas en función de h .

Ejercicio 22 Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in C^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es cuadrática en cada } I_i\}$$

construya bases adecuadas y obtenga la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 23 Sea $I = (0, 1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I .

$$1. \text{ Definimos para cada } 1 \leq i \leq N-1, \quad G_i(x) = \begin{cases} (1-x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1-x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$$

verifique que $G_i \in H_0^1(0, 1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0, 1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

$$2. \text{ Dada } f \in L^2(0, 1) \text{ considere el problema } \begin{cases} -u'' = fc \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

escribalo en forma variacional sobre H_0^1 y escriba la formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N-1\}$$

a) Demuestre que ambos problemas variacionales tienen solución única.

b) Demuestre que $\int_0^1 (u - u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del item previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos.

3. Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

Ejercicio 24 Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f .

Llevar el problema a la forma débil:

Hallar $u \in H_0^2(0,1)$ tal que

$$(u'', v'') = (f, v) \quad \forall v \in H_0^2(0,1)$$

demuestre que este problema variacional tiene solución única.

Ejercicio 25 Defina

$$V_h = \{\phi \in C^0(0,1), \text{ tales que } \phi \text{ es cúbica en cada } I_i\}$$

y pruebe que en general V_h no está incluido en H^2 . Piense como definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset H_0^2$. Construya las bases para W_h .