

# ANÁLISIS NUMÉRICO — Práctica 1

2<sup>do</sup> Cuatrimestre 2007

**Ejercicio 1** Se utiliza el esquema en diferencias:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1 - 2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \quad \text{donde } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k/h^2$$

para aproximar la ecuación  $U_t = U_{xx}$ , donde se supone que  $U$  tiene derivadas continuas y acotadas hasta el tercer orden en  $t$ , y hasta de orden seis en  $x$ . Probar que el error de discretización  $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$  es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = re_{j-1}^n + (1 - 2r)e_j^n + re_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde

$$T(x_j, t_n) = \frac{h^2}{12} (6rU_{tt} - U_{xxxx})_{j,n} + \frac{k^2}{6} U_{ttt}(x_j, t_n + \theta_n k) - \frac{h^4}{360} U_{xxxxx}(x_j + \theta_j h, t_n)$$

con  $-1 < \theta_j < 1$ ,  $0 < \theta_n < 1$ . Si el valor máximo de  $|T|$  es  $M$ , deducir que para  $0 < r \leq 1/2$ ,  $|e_{j,n}| \leq tM$ . Pruebe que el error de truncado es de orden  $h^2$ , salvo para  $r = 1/6$  en que es de orden  $h^4$ .

**Ejercicio 2** Escribir un programa en Matlab para integrar con el método explícito del Ej. 1, la ecuación del calor  $u_t = u_{xx} + f(x, t)$  en el intervalo  $[0, 1]$  para un dato inicial arbitrario y con condiciones de borde (de tipo Dirichlet) homogéneas.

**Ejercicio 3** Utilizar el programa del ejercicio previo para el caso

$$u_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Considere  $h = 0.05$ ,  $k = 0.0012$ , y  $k = 0.0013$ . Avance por lo menos 50 pasos, ¿qué sucede?. Verifique el valor de  $r = k/h^2$  en cada caso.

**Ejercicio 4** Repetir el ejercicio anterior con  $k = 0.0013$  para

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = x(1 - x) \\ 2) \quad & u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \end{aligned}$$

Observe que ambos casos resultan estables en los primeros 50 pasos. ¿Qué ocurre con 1) para 100 pasos, y con 2)?. ¿Por qué cree que resulta mucho más estable este último caso?. (Sug.: El dato inicial coincide con un autovector de la matriz tridiagonal resultante.)

**Ejercicio 5** En los casos del ejercicio previo, resolver analíticamente y estudiar el comportamiento del error hasta el tiempo  $Tf = 1$  utilizando el programa del ejercicio 2. Tome  $r = 0.5$  y diversos pasos de discretización en  $t$  y  $x$ . Plotear  $\log(\|e^n\|)$  en cada paso de tiempo, donde  $\|e^n\| = \max_{0 \leq j \leq N} \{|e_j^n|\}$ ,  $N = 1/h$ . Observe que el error decrece a medida que el tiempo avanza lo que indica que la cota obtenida el ejercicio 1) no es demasiado buena.

**Ejercicio 6** Idem que el ejercicio anterior pero con

$$1) \quad u_t = u_{xx} - 2 \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 0$$

$$2) \quad u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1$$

Que nota en 2)?. A que supone que se debe?.

**Ejercicio 7** i) Usando el método de Fourier probar que el esquema en diferencias propuesto en el Ej. 1 es estable para  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ .

ii) Considere el esquema en diferencias

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

Cuál es el error de truncado ?. Es estable?.

**Ejercicio 8** Considerar la ecuación  $u_t = au_{xx}$  con condiciones de Dirichlet homogéneas y con  $a$  positivo. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

a) Probar utilizando el método de Fourier que el método es estable para cualquier valor de  $r$ . Qué obtiene con el método matricial?.

b) Probar que el error de truncado es  $O(k) + O(h^2)$ .

**Ejercicio 9** Estudiar la estabilidad y el error de truncado para el método  $\theta$ , con  $0 \leq \theta \leq 1$ :

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra\{\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1 - \theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}$$

Que ocurre si  $\theta = 1/2$ ?

**Ejercicio 10** Escriba un programa que permita integrar la ecuación del calor con el método de Crank-Nicolson. Estudie numericamente si la condición  $r \leq 1$  es necesaria para tener principio del máximo en el esquema.

(Sug.:Tomar un dato inicial que valga cero en todos los nodos salvo en uno).

**Ejercicio 11** Considerar la ecuación del calor  $U_t = U_{xx}$ , en el intervalo  $[0, 1]$ , con condiciones de Neumann en el borde. Hallar un método centrado en  $x$ , y explícito de primer orden en  $t$ . Analizar la estabilidad del esquema en diferencias obtenido.

**Ejercicio 12** Dada la ecuación cuadrática  $z^2 + bz + c = 0$  con  $b$  y  $c$  en  $\mathbb{R}$ . Demuestre que las raíces están en el círculo unitario  $\Leftrightarrow |c| \leq 1$  y  $|b| \leq 1 + c$ .

(Este resultado facilita el análisis de estabilidad por el método de Fourier para esquemas de tres capas).

**Ejercicio 13** Para aproximar las soluciones de  $u_t = u_{xx}$  considere  $0 \leq \theta \leq 1$  y tome

$$\theta \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2} \right) + (1 - \theta)(u_j^n - u_j^{n-1}) = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

i) Estudie el error de truncado en términos de  $\theta$ .

ii) Analizar la estabilidad usando el método de Fourier. ¿A qué conclusión llega?.

**Ejercicio 14** Considerar el esquema en diferencias de tres capas completamente implícito para la ecuación del calor  $U_t = aU_{xx}$ :

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} - aL_{xx}u_j^{n+1} = 0$$

donde  $k$  es el paso de integración en  $t$ , y  $L_{xx}u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$ . ¿Cuál es el orden del error de truncado?. Estudie la estabilidad con el método de Fourier.

**Ejercicio 15** Para aproximar la ecuación  $u_t = u_{xx}$  se propone el siguiente esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\theta \delta_{xx}(u_j^n) + (1 - \theta)\delta_{xx}(u_j^{n-1})}{(\Delta x)^2}$$

con  $0 \leq \theta \leq 1$ , y  $\delta_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$ .

1. Demostrar que el esquema es consistente cualquiera sea  $\theta$ .

2. Demostrar que el método propuesto es estable si  $\theta \leq \frac{1}{2}$  y  $4r(1 - \theta) \leq 1$  con  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ .

**Ejercicio 16** Para la siguiente ecuación

$$u_t = u_{xx} + \alpha u$$

se propone la aproximación

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \alpha \Delta t u_j^n$$

para  $\alpha < 0$  hallar condiciones sobre  $r$  que aseguren la estabilidad, si  $\alpha > 0$  halle  $r$  de modo tal que el radio espectral de la matriz de iteraciones resultante  $M$  verifique  $\rho(M) \leq (1 + \Delta t \alpha)$  en tal caso demuestre que bajo tales condiciones, si llamamos  $\frac{T_{final}}{\Delta t} = N$ , se tiene  $\|M^N\|_2 \leq C$ ,  $C$  independiente de  $\Delta x, \Delta t$ , y entonces el esquema resulta estable.

**Ejercicio 17** Para  $a > 0$ , se quieren aproximar las soluciones de  $u_t = au_{xx} + u_x$  con un esquema de dos capas explícito en  $t$ , centrado de segundo orden en  $x$ . De condiciones sobre  $r$  que aseguren la estabilidad. Qué sucede si  $a \rightarrow 0$ ?. Qué sucede si discretiza  $u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$ ?. Estudie el error de truncado en ambos casos.

**Ejercicio 18** Se tiene el problema

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x \quad x \in (0, 1) \quad t > 0$$

con las condiciones de borde e iniciales:

$$u_x(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1 - x^2$$

escriba un esquema explícito en  $t$ , centrado de segundo orden en  $x$  y de condiciones suficientes sobre  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  para asegurar la estabilidad. Implemente el algoritmo numéricamente.

**Ejercicio 19** Para aproximar la ecuación  $U_t = U_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$  con condiciones de Dirichlet homogéneas y dato inicial  $U(x,0) = U_0(x)$  se propone el esquema :

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r \alpha L_{xx}(u_j^{n+1}) + r(1 - \alpha)L_{xx}(u_j^n)$$

donde  $L_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$ ,  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ .

- a) Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en  $\|\cdot\|_2$ .  
 b) Demostrar que si  $r \in [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$  se tiene principio del máximo.

**Ejercicio 20** Se busca aproximar la solución de la ecuación

$$u_t = a(x, t)u_{xx} \quad x \in (0, 1) \quad t > 0$$

con condiciones de borde de tipo dirichlet homogeneas, y para ello se utiliza el esquema

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} a_j^{n+1/2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

estudie estabilidad y error de truncado. Dé condiciones para que valga el principio del máximo. Reemplace en el esquema  $a_j^{n+1/2}$  por  $\frac{a_j^{n+1} + a_j^n}{2}$  y repita los cálculos.

**Ejercicio 21** Discretizando las derivadas en  $x$  con diferencias centradas halle un esquema explícito que aproxime la solución de la ecuación

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x$$

con condiciones de borde homogeneas. Estudie estabilidad, error de truncado y principio del máximo para el esquema obtenido.

**Ejercicio 22** Dada la ecuación del calor en 2-dimensiones

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{con } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \quad t > 0$$

Se propone el siguiente esquema de diferencias explicito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + r_x (u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n) + r_y (u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n)$$

donde  $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  y  $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ .

Hallar el error de truncado local y dar condiciones sobre  $r_x$  y  $r_y$  para garantizar la estabilidad.

**Ejercicio 23** Resolver numericamente la ecuación del calor  $u_t = \Delta u$  en el rectángulo  $[0, 1] \times [0, 1]$  con condición de borde de tipo Dirichlet y dato inicial  $u_0(x, y)$  utilizando el esquema de diferencias propuesto en el ejercicio anterior.