Análisis Real - Medida y Probabilidad 15 de Julio de 2003

*Apellido y nombres:*________________________ *L.U./Año:*________

Segundo Parcial

1	2	3	4	5	Calificación

1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y $1 \leqslant p < \infty$ tales que existe $c_p \in \mathbb{R}$,

$$c_p = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^p dx.$$

donde el supremo es sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que, para cada $E \subset \mathbb{R}^n$ medible,

$$\|M(f)\|_{p,E}^p \leqslant c_p |E|.$$

2. Sea μ una medida definida sobre los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$M(\mu)(x) = \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{|B(x,r)|}.$$

(a) Si δ es la medida de Dirac, probar que existe una constante $c > 0$ tal que $M(\delta)(x) = \frac{c}{|x|^n}$.

(b) Probar que para todo $\lambda > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^n : M(\delta)(x) > \lambda\}| = \lambda^{-1}$.

3. Sea $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espacio de medida. Se dice que ν es *semifinita* si para cada $E \in \mathcal{M}$ con $\nu(E) = \infty$, existe $F \in \mathcal{M}$, $F \subset E$ y $0 < \nu(F) < \infty$.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos para $E \in \mathcal{M}$,

$$\omega(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E \text{ y } \mu(F) < \infty\}.$$

(a) ω es una medida en $(X, \mathcal{M})$ y es semifinita.

(b) Si μ es semifinita entonces $\mu = \omega$.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua. Probar que f es Lipschitz si, y sólo si, $f' \in L^\infty$

5. Sean μ y ν medidas definidas en $(X, \mathcal{M})$ y sea $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que para todo $E \in \mathcal{M}$,

$$\nu(E) = \int_E g d\mu.$$

Probar que, para toda $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que exista $\int_E f d\nu$, se tiene que

$$\int_E f d\nu = \int_E f\, g d\mu.$$