Análisis Real - Medida y Probabilidad 22 de mayo de 2003

*Apellido y nombres:*________________________ *L.U./Año:*________

	1	2	3	4	5	Calificación
Primer Parcial						

1. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible tal que $|E| = 1$. Demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|(E+x) \cap E| = 1/2$. (Sug: probar que $|(E+x) \cap E|$ es una función continua.)

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\{y \in B(x,\delta) : |f(y) - g(y)| > \varepsilon\}| = 0.$$

Probar que $f = g$ c.t.p.

3. Sean $f, f_n : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles tal que $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p. y g integrable sobre $\mathbb{R}^p$ tal que $|f_n| \leqslant g$. Dado $a > 0$, se definen

$$E_k = \bigcup_{n \geqslant k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant a\}.$$

(a) Probar que $|E_k| < \infty$.

(b) Probar que $\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$. Deducir que $f_n \overset{m}{\to} f$.

4. Sean $E \subset \mathbb{R}^p$ medible y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa tal que $O(f,E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1} : x \in E,\ 0 < y < f(x)\}$ es un conjunto medible. Probar que f es medible y que

$$\int_E f(x)dx = |O(f,E)|.$$

Sugerencia: Usar el Teorema de Tonelli.

5. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

a) $H_n \subset \mathbb{R}^p$ $\sigma-$elementales entonces $\cap_{n=1}^{\infty} H_n$ es $\sigma-$elemental.

b) Si $f_k : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles no negativas tales que $f_k \to f$ y $f_k \leqslant f$ c.t.p. entonces $\int_{\mathbb{R}^p} f(x)dx = lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} f_k(x)dx$.

c) Si $g_n : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones borelianas tales que $g_n \to g$ c.t.p. entonces g es boreliana.

d) Sean $f : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y $E \subset \mathbb{R}^p$ medible tal que $\int_E f(x)dx = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subset E$ cerrado tal que $\int_F f(x)dx > 1 - \varepsilon$.