

ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 1: MEDIDA DE LEBESGUE

1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^p$ medible y tal que $E = A \cup B$, donde $|B| = 0$. Probar que A es medible.
2. Sea $E \subseteq A$ con $|A| = 0$. Probar que E es medible y que $|E| = 0$. Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c . ¿Cuál es el cardinal de los no medibles?
3. (a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de \mathbb{R}^2 de medida cero.
(b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.
(c) ¿Y si f tiene finitas discontinuidades?
4. Si E_1 y E_2 son medibles, mostrar que

$$|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

5. Sean $v \in \mathbb{R}^p$ y $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $T(x) = x + v$. Probar:

(a) $|T(E)|_e = |E|_e$, $E \subseteq \mathbb{R}^p$.

(b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^p$ y $r > 0$. Consideramos el conjunto

$$rA = \{r \cdot a : a \in A\}.$$

Probar:

(a) $|rA|_e = r^p|A|_e$.

(b) Si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^p|A|$.

7. Sea $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| < r\}$.
- Suponiendo conocida $|B(0, 1)|$, calcular $|B(0, r)|$.
 - Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$ medible. Probar que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(r) = |A \cap B(0, r)|$ es continua.
 - Si A es medible, para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$, existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.
 - Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$ medible y tal que $0 < |A| < \infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n subconjuntos disjuntos de $A : (A_j)_{1 \leq j \leq n}$ tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $j : 1 \leq j \leq n$.
8. Sea $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Probar que: $E \subseteq [0, 1)$ medible $\Rightarrow T^{-1}(E)$ medible. Además

$$|T^{-1}(E)| = |E|.$$

9. Sean A y B subconjuntos de \mathbb{R}^p tales que $d(A, B) > 0$. Probar que:

$$|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e.$$

10. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n \geq 1}$ definimos

$$A_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad A^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar:

- A_* y A^* son medibles.
- $|A_*| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
- Si para algún n , $|\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$, entonces $|A^*| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
- Si $\sum_{n \geq 1} |A_n| < \infty$, entonces $|A^*| = 0$.
- ¿Qué pasa si A_n es creciente? (Es decir, si $A_n \subseteq A_{n+1}$).

11. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene la potencia del continuo.
12. Construir un subconjunto de $[0, 1]$ como el conjunto de Cantor excepto que en el k -ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$, $0 < \delta < 1$. Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.
13. Sea E el conjunto de puntos del $(0, 1)$ tal que: $x \in E$ si y sólo si en el desarrollo decimal de x no aparece el dígito 7. Mostrar que E tiene medida de Lebesgue 0.
14. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
 - (a) E es medible.
 - (b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \setminus F|_e < \epsilon$.
 - (c) Existen H de clase F_σ y N de medida cero, tal que $E = H \cup N$.
15. Construya una sucesión de conjuntos $\{E_k\}$ disjuntos tal que

$$|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k|_e < \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k|_e.$$

Sugerencia: considerar translaciones racionales de conjuntos de Vitali.

16. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^p$ definimos su medida interior

$$|E|_i = \sup\{|F| : E \supseteq F, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar:

- (a) $|E|_i \leq |E|_e$.
 - (b) Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.
 - (c) Si $|E|_e < \infty$ y $|E|_i = |E|_e$, entonces E es medible.
 - (d) Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.
 - (e) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.
 - (f) $(E_j)_{j \geq 1}$ disjuntos, entonces $|\bigcup_{j \geq 1} E_j|_i \geq \sum_{j \geq 1} |E_j|_i$.
17. Sea V un conjunto de Vitali. Si E es medible y $E \subseteq V$ entonces $|E| = 0$. Luego $|V|_i = 0$.

18. (a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_j)_{j \geq 1}$ tal que

$$\left| \bigcup_{j \geq 1} E_j \right|_i > \sum_{j \geq 1} |E_j|_i.$$

- (b) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < \infty$ y $|E|_e = \infty$.

19. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^p$ medible y $A \subseteq E$. Probar que:

$$|E| = |A|_i + |E \setminus A|_e.$$

20. Si $(E_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos de \mathbb{R}^p , entonces

$$\left| \bigcup_{k \geq 1} E_k \right|_e = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

21. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Mostrar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

22. Sea $E \subset \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: existe q , $0 < q < 1$, tal que para todo intervalo (a, b) , el conjunto $E \cap (a, b)$ puede cubrirse con numerables intervalos cuya suma de longitudes es a lo sumo $q(b - a)$. Entonces E es un conjunto de medida nula.

23. Sea $E \subset \mathbb{R}^p$ medible con $|E| > 0$. Probar que dado $\epsilon > 0$ existe un intervalo I tal que $|E \cap I| > 0$ y $|I - (E \cap I)| < \epsilon$.

24. Mostrar que existe un subconjunto H del intervalo $[0, 1]$ de clase F_σ , de medida uno, formado solo por puntos irracionales. Probar que H es unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío.

25. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible que cumple la siguiente propiedad:

$$\text{si } x \in E \text{ e } y \in E \text{ entonces } \frac{x+y}{2} \notin E.$$

Probar que E tiene medida cero. Sugerencia: probar que si I es un intervalo centrado en un punto de E entonces $|E \cap I| \leq \frac{1}{2}|I|$.