

ANÁLISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 2: FUNCIONES MEDIBLES

1. Sea \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} y $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Probar:
 - (a) Si f es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible para todo $B \in \mathcal{B}$.
 - (b) Si $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A, B \in \mathcal{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathcal{B}}$.
2. Sean $f, g: \mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Mostrar que los conjuntos $\{f > g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles.
3. (a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible. ¿Es f medible?
(b) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?
4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar:
 - (a) Si f es monótona entonces f es medible Borel.
 - (b) Si f es derivable sobre \mathbb{R} entonces f' es medible Borel.
5. Si $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible entonces existe $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.
6. Sea $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible.
7. (a) Hallar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua a.e. tal que no existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua que verifica $f = g$ a.e.
(b) Hallar $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.

8. Sea I un intervalo de \mathbb{R}^p .

(a) Sea $E \subseteq I$ medible. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$

(b) Sea φ una función simple definida sobre I . Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

(c) Sea $f: I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y finita en c.t.p. Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe φ simple tal que

$$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

(d) Sea f como en (c). Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe g continua tal que

$$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

9. Sea E medible y $(f_k)_{k \geq 1}: E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$ existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$ de modo que

$$|f_k(x)| \leq M_x \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$ existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}| \leq \alpha/k,$$

entonces $|E| = 0$.

10. Sea E de medida finita y $(f_k)_{k \geq 1}: E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$ de modo que

$$|f_k(x)| \leq M_x \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Probar que dado $\epsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado y $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|E \setminus F| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in F.$$

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = n \chi_{[1/n, 2/n]}(x)$. Probar:
- $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente,
 - para cada $\delta > 0$, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$,
 - no existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en E^c .
12. (a) Sea E de medida finita y sean $(f_n)_{n \geq 1} : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tal que $f_n \rightarrow f$ a.e. en E . Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i \geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:
- $|E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i| = 0$,
 - para cada $i \geq 1$, $f_n \xrightarrow{m} f$ en E_i .
- (b) El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde A_k es de medida finita para cada $k \in \mathbb{N}$.
13. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto A y finitas en c.t.p. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A medibles, tales que $|A \setminus A_n| \rightarrow 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{m} f$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$.
14. Supongamos que $f_k \xrightarrow{m} f$ y $g_k \xrightarrow{m} g$ sobre E . Probar:
- $f_k + g_k \xrightarrow{m} f + g$ sobre E .
 - Si $|E| < +\infty$, entonces $f_k g_k \xrightarrow{m} f g$ sobre E . Mostrar que la hipótesis $|E| < +\infty$ es necesaria.
 - Sea $(f_k/g_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E . Si $|E| < +\infty$, $g_k \rightarrow g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \xrightarrow{m} f/g$.
15. Sea $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$.
- f es continua y biyectiva. Además f^{-1} es continua.
 - Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.
 - Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.

- (d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.
 - (e) Hallar $h_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.
16. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es s.c.s. (s.c.i., continua) entonces f es medible Borel.