ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 4: TEOREMA DE FUBINI

1. (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$$

tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que, para casi todo $y \in \mathbb{R}$,

$$E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$$

tiene medida nula.

(b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es medible. Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$$

es medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

3. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible. Si $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$ es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que:

$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \qquad \forall (x, y) \in I \times I.$$

Probar que E no es medible.

5. Sea f una función medible y no negativa definida sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

La función ω se llama distribución de f sobre E. Probar:

(a) $\omega : (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.

(b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

(c) $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$.

(d) ω continua en $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$.

(e) Si $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$.

(f) $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$. (Sug.: Notar que $\int_E f = |R(f, E)| = \int\int_{R(f,E)} dx d\alpha$, y usar el Teorema de Tonelli.)

(g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

6. (a) Usar el Teorema de Fubini para probar la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(b) Mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

7. Sea $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. Probar que:

$$|B(0, 1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$

8. Mostrar que la función $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)^2$ verifica

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 f(x, y) dx$$

a pesar de que f no es integrable sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

9. Dada $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0,1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$ para todo $t \geq 0$, consideramos la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x,t) = e^{-xt} f(t)$. Demostrar:

   (a) G es medible.

   (b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$.

10. Definimos $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ k(x,y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x,y) = f(x.y)$ es medible.

11. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles.

    Probar que la función $h(x) = |(A-x) \cap B|$ es medible y

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = |A||B|.$$

12. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

13. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

    (a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la función $e^{-2\pi i <\xi,x>} f(x)$ es medible e integrable, donde $<\xi, x> = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$.

    (b) Se define la Transformada de Fourier de f como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i <\xi,x>} f(x)dx, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

    Probar:

    i. $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.

    ii. $\hat{f}(\xi) \longrightarrow_{|\xi|\to\infty} 0$, (Lema de Riemman–Lebesgue).

    iii. Si $f(x) = f_1(x_1)\dots f_n(x_n)$, donde $f_k \in L^1(\mathbb{R}), 1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1)\dots\hat{f}_n(\xi_n)$.

    iv. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.