ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 5: ESPACIOS L^p

1. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

   (a) Probar que $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$.

   (b) Mostrar que $|E| < \infty$, es una condición necesaria para la inclusión.

2. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq r \leq p \leq s < \infty$. Si $f \in L^r(E) \cap L^s(E)$, entonces $\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s$.

3. Probar que:

   (a) Si $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(E)$, para algún $p : 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_n \overset{m}{\longrightarrow} f$ sobre E.

   (b) Si $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(E)$, $g_n \longrightarrow g$ en $L^q(E)$, y $1/p + 1/q = 1$, entonces $f_n g_n \longrightarrow fg$ en $L^1(E)$.

   (c) Si $|E| < \infty$ y $f_n \longrightarrow f$ en $L^\infty(E)$, entonces $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(E)$, para todo $p \geq 1$.

4. Dadas las funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

   probar que $f_n \longrightarrow 0$ a.e. y $f_n \overset{m}{\longrightarrow} 0$, pero f_n no converge en $L^p([0,1])$ para $1 \leq p \leq \infty$.

5. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, $(f_n)_{n\geq 1}$ y f en $L^p(E)$, donde $1 \leq p < \infty$. Probar:

   (a) $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_{L^p(E)} \longrightarrow \|f\|_{L^p(E)}$.

(b) Si $f_n \longrightarrow f$ a.e. sobre E, entonces:

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \longrightarrow \|f\|_{L^p(E)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E)} \longrightarrow 0.$$

(Sug.: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión: $g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p$.)

6. Sea $k : \mathbb{R}^{n+n} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $c > 0$ que verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int |k(x,y)| dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int |k(x,y)| dx \leq c.$$

Probar que si $1 < p < \infty$, entonces $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$K(f)(x) = \int k(x,y) f(y) dy$$

está bien definida y es uniformemente continua.

7. Para $1 \leq p < \infty$ y $0 < |E| < \infty$, definimos:

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{|E|} \int_E |f|^p \right)^{1/p}.$$

Probar:

(a) $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$.

(b) $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) $\frac{1}{|E|} \int_E |fg| \leq N_p[f] N_{p'}[g],\; 1/p + 1/p' = 1$.

(d) $\lim_{p\to\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

8. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^p$ tal que $0 < |E| < \infty$ y $f \in L^\infty(E)$ que verifica $\|f\|_\infty > 0$. Para cada $n \in \mathrm{N}$, consideramos $a_n = \int_E |f(x)|^n dx$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \|f\|_\infty$.

9. Supongamos que $f_n \longrightarrow f$ a.e. y que $f_n, f \in L^p$, $1 < p < \infty$. Si $\|f_n\|_p \leq M < \infty$, demostrar que $\int f_n g \longrightarrow \int fg$, para toda $g \in L^{p'}$ donde $1/p + 1/p' = 1$. ¿Es cierto este resultado para $p = 1$?

(Hint: Suponer primero que g es una función característica).

10. Si $f_n \longrightarrow f$ en L^p, $1 \leq p < \infty$, $g_n \longrightarrow g$ puntualmente y $\|g_n\|_\infty \leq M$, para todo $n \in \mathrm{N}$, probar que $f_n g_n \longrightarrow fg$ en L^p.

11. Muestre que cuando $0 < p < 1$, los entornos $\{f \in L^p(0,1) : \|f\|_p < \varepsilon\}$ de 0, no son convexos.

12. Sea f tal que para todo $\alpha > 0$,

$$\omega(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \leq c(1+\alpha)^{-p}.$$

Probar que $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, si $0 < r < p$.

13. Sea $E = [0, 1/2]$. Probar:

    (a) $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(E)$, $(1 \leq p < \infty)$, pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

    (b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para todo $p : 1 \leq p < \infty$, pero $g \notin L^\infty(E)$.

14. Sea $E = [0, \infty)$. Probar que $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$ pero $f \notin L^p(E)$ para ningún $p : 1 \leq p < \infty$, y $p \neq 2$.

15. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, probar que:

    (a) $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow_{|h|\to\infty} 2^{1/p}\|f\|_p$

    (b) $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow_{|h|\to 0} 2\|f\|_p$

16. (a) Dadas funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ donde $1/p + 1/p' = 1$, probar que la convolución $f * g(x)$ existe y es finita para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además define una función acotada y uniformemente continua.

    (b) Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $0 < |E| < \infty$, probar que:

    $$E - E = \{x - y : x, y \in E\}$$

    contiene un conjunto abierto no vacío. (Sug.: considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.)

17. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x)dx.$$

Si $f \in L^p$, probar que:

(a) $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p}\|f\|_p$.

(b) $f_h \in L^p$ y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.

(c) Para cada $r \geq p \geq 1,\ \|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p}\|f\|_p$.

(d) $\|f_h - f\|_p \longrightarrow_{h\to 0} 0$.

18. Sean $1 < p < \infty,\ 1/p + 1/p' = 1$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Probar:

(a) $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\right|$.

(b) Si $(f_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de funciones de L^p tal que para toda $g \in L^{p'}$ resulta: $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k g dx = \int_{\mathbb{R}^n} fg dx$, entonces:

$$\|f\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p.$$

19. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $p \geq 1$. Definimos:

$$L^p_*(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medible} : \sup_{t>0} t\left(|\{x \in E : |f(x)| > t\}|\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Probar:

(a) $L^p(E) \subseteq L^p_*(E)$,

(b) si $|E| < \infty$ y $p > 1$, entonces $L^p_*(E) \subseteq L^1(E)$.

20. Dados $[a, b]$ un intervalo acotado y $f \in L^p([a, b])$ $1 < p < \infty$, definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \qquad , \qquad x \in [a, b].$$

Probar que existe una constante K tal que para toda partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ resulta:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \leq K.$$