ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 6: DIFERENCIACION

1. Sea $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar:

   (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

   (b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces f^* es semicontinua inferiormente.

2. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$f^{**}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|dt.$$

   Probar que existen constantes $c, C > 0$ que dependen sólo de la dimensión tal que

$$cf^*(x) \leq f^{**}(x) \leq Cf^*(x.)$$

   (Es decir f^{**} y f^* son funciones equivalentes.)

3. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisface: $|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| > 0$. Probar que existe $c > 0$ tal que $f^*(x) \geq c|x|^{-n}$ para $|x| \geq 1$. Deducir que $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, salvo que $f \equiv 0$.

4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

   (a) Probar que si $1 \leq p < \infty$, existe $c > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x:|f(x)|\geq\alpha/2\}} |f(x)|dx.$$

   (b) Probar que si $1 < p \leq \infty$, entonces $f^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Además existe $c_p > 0$ que no depende de f tal que $\|f^*\|_p \leq c_p\|f\|_p$.

5. Sea $\{S\}$ una familia de conjuntos medibles. Se dice que $\{S\}$ se *contrae regularmente a* x sii

   (a) los diámetros de los conjuntos S tienden a 0,

   (b) si Q es el cubo más chico centrado en x que contiene a S entonces existe una constante k independiente de S tal que $|Q| \leq k|S|$.

   Los conjuntos S no necesitan contener a x.

   (i) Probar que $\{B(x,r)\}_{r>0}$ se contrae regularmente a x.

   (ii) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y x es un punto de Lebesgue de f entonces
   $$\frac{1}{|S|}\int_S |f(y) - f(x)|dy \to 0$$
   para toda familia $\{S\}$ que se contrae regularmente a x.

6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible y acotada tal que $sop(\phi) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$ y $\int_{\mathrm{R^n}} \phi dx = 1$. Para cada $\epsilon > 0$ sea $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)$. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ probar que si x es un punto de Lebesgue de f,
   $$\lim_{\epsilon\to 0}(f * \phi_\epsilon)(x) = f(x).$$

7. Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que
   $$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

8. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Probar:

   (a) F es absolutamente continua.

   (b) F es derivable en casi todo punto y $F'(x) = f(x)$.

9. Sean $F : [a,b] \to R$, absolutamente continua en $[a,b]$, g integrable sobre $[a,b]$ y
   $$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$
   Probar que:
   $$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$