ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 7: FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

   (a) Probar que f es continua en $[0,1]$, pero $V(f;[0,1]) = \infty$.

   (b) Si $g(x) = xf(x)$, probar que g es de variación acotada sobre $[0,1]$.

2. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, funciones de variación acotada. Entonces:

   (a) $f+g, f-g, fg$ y $|f|$ son de variación acotada.

   (b) Si existe $m > 0$ tal que $|f(x)| \geq m$ $(x \in [a,b])$, la función $1/f$ es de variación acotada.

3. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Probar que la función f definida sobre $[a,b]$ como $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ es de variación acotada.

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Para cada $x \in (a,b]$ notemos $V(x) = V(f;[a,x])$ y $V(a) = 0$. Dado $x^* \in [a,b]$ probar que f es continua a izquierda (resp. a derecha) en x^* si, y sólo si, V es continua a izquierda (resp. a derecha) en ese punto.

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es a lo sumo numerable.

6. Sea f absolutamente continua en $[\epsilon, 1]$, para todo $\epsilon > 0$.

   (a) Si además f es continua en 0, ¿es f absolutamente continua en $[0,1]$?

   (b) Si además f es continua en 0 y de variación acotada en $[0,1]$, ¿es f absolutamente continua en $[0,1]$?

7. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones de variación acotada sobre $[a,b]$. Si existe $M>0$ tal que $V(f_k;[a,b])\leq M$, para todo $k\in\mathbb{N}$ y $(f_k(x))_{k\geq 1}$ converge a $f(x)$, para todo $x\in[a,b]$, entonces $V(f;[a,b])\leq M$.

8. Dar un ejemplo de una sucesión convergente de funciones de variación acotada cuyo límite sea una función de variación no acotada.

9. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$, donde $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. Probar que f es de variación acotada y $V(f;[0,1])\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.