ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 8: MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS

1. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

   (a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

   (b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

2. Sean X un conjunto y $A_1, \ldots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^{N} A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$álgebra generada por $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Probar:

   (a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen $i_1, \ldots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^{k} A_{ij}$.

   (b) Si f es $\Sigma-$medible, entonces f es constante sobre cada A_i.

3. Sean (X, Σ) un espacio medible.

   (a) Si f y g son $\Sigma-$medibles, entonces $\{f = g\} \in \Sigma$.

   (b) Sean $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\Sigma-$medibles. Entonces

   $$\{x \in X : \text{ existe } \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ y es finito } \} \in \Sigma.$$

4. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k \geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge uniformemente en A.

5. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \overset{\mu}{\to} f$) si para cada $\epsilon > 0$,

   $$\lim_{k \to \infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

   Probar:

(a) Si $f_k \to f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \xrightarrow{\mu} f$ sobre E.

(b) Si $f_k \xrightarrow{\mu} f$ sobre E, existe una subsucesión $(f_{kj})_{j\geq 1}$ tal que $f_{kj} \to f$ a.e. en E.

6. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $g_n \xrightarrow{\mu} g$, entonces:

   (a) $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$,

   (b) $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$,

   (c) $f_n \vee g_n \xrightarrow{\mu} f \vee g$,

   (d) $f_n \wedge g_n \xrightarrow{\mu} f \wedge g$,

   (e) $f_n \chi_A \xrightarrow{\mu} f \chi_A$, para todo $A \in \Sigma$.

7. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ no negativa e integrable. Definimos $\mu(A) = \int_A g(x)dx$, para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue. Entonces:

$$f_n \overset{m}{\to} f \qquad \Rightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. tales que para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f \text{ en } X \backslash A_\epsilon,$$

   es decir, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f. Probar que $f_n \to f$ en casi todo punto.

9. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

10. Sea (X, Σ, μ)un espacio de medida finita. Probar que toda función medible y finita a.e. es límite casi uniforme de una sucesión de funciones simples.

11. Demostrar que aún en un espacio (X, Σ, μ) de medida finita, convergencia casi uniforme no implica convergencia en $L^1(X, \Sigma, \mu)$.

12. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y μ y ν dos medidas sobre Σ tales que
    $\mu(A) \leq \nu(A)$, para todo $A \in \Sigma$. Probar que

$$f \in L^1(X, \nu) \qquad \Rightarrow \qquad f \in L^1(X, \mu).$$

13. Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida y $E\in\Sigma$. Si $f\in L^1(E)$ probar que para todo $\epsilon>0$, existe $\delta=\delta(\epsilon)>0$:

$$A\subseteq E,\ A \text{ medible y } \mu(A)<\delta \qquad \Rightarrow \qquad \int_A |f|d\mu<\epsilon.$$

14. Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida con la siguiente propiedad: existe $\delta>0$ tal que

$$E\in\Sigma \qquad \Rightarrow \qquad \mu(E)=0 \quad \text{ó} \quad \mu(E)>\delta.$$

Probar que si $f\in L^1(X,\mu)$ entonces $f\in L^\infty(X,\mu)$.

15. Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

    (a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1}d\mu\to 0$, probar que $f_n\xrightarrow{\mu}0$.

    (b) Si $\mu(X)<\infty$ y $f_n\xrightarrow{\mu}0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1}d\mu\to 0$.

16. Sean $X=\mathbb{N}$, $\Sigma=P(\mathbb{N})$ y $\mu(A)=C(A)$. Probar que $f\in L^1(\mathbb{N},\mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$ y, en este caso $\int_{\mathbb{N}} f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

17. Sean $X=\mathbb{N}$ y μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que: $\mu(E)=\sum_{n:n\in E}\frac{1}{n^2}$.

    (a) Probar que μ es una medida finita.

    (b) Para cada $k\in\mathbb{N}$, definimos $f_k:X\to\mathbb{R}$,

    $$f_k(n)=\begin{cases}\sqrt{n} & , \quad 1\leq n\leq k\\ 0 & , \quad k<n.\end{cases}$$

    Probar que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en μ–medida.

    (c) Sea $f:X\to\mathbb{R}$, $f(n)=\sqrt{n}$ $(n\in\mathbb{N})$. ¿Para qué valores de $p\geq 1$, resulta $f\in L^p(X,\mu)$?

18. Sean (X,Ω,ν) un espacio de medida finita y $\varphi:X\to\mathbb{R}_{>0}$ una función ν–medible. Probar que:

    (a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi\ln(\varphi)\ d\nu$,

    (b) si φ pertenece a $L^2(X,d\nu)$ entonces $\varphi\ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X,d\nu)$.

19. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ espacio medible, $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ que satisface:

   (a) $A, B \in \mathcal{F} \ \wedge \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

   (b) $A_n \in \mathcal{F} \ (n \in \mathbb{N}) \ \wedge \ A_n \searrow \emptyset \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

   Probar que μ es una medida.

20. Sean $S^1 = \{z \in \mathcal{C} : |z| = 1\}$, $\varphi : [0,1) \to S^1$, $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. En S^1 se considera la $\sigma-$álgebra

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq S^1 : \varphi^{-1}(A) \text{ es medible Lebesgue}\}$$

   y la medida m sobre $\mathcal{A}$ definida por:

$$m(A) = |\varphi^{-1}(A)|.$$

   Dada $f : S^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es $\mathcal{A}-$medible y

$$\int_{S^1} f \ dm = \int_0^1 f \circ \varphi \ dt.$$