ANALISIS REAL

Primer Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 9: MEDIDAS CON SIGNO

1. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ), tal que por lo menos una de ellas es finita. Si $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$ $(E \in \Sigma)$, probar que ν es una medida con signo.

2. Sea ν una medida con signo. Probar:

   (a) Si P es un conjunto positivo con respecto a ν y $A \subseteq P$, entonces A es un conjunto positivo con respecto a ν.

   (b) Si $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ son conjuntos positivos con respecto a ν, entonces $\cup_{1\leq i\leq n} P_i$ también lo es.

3. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

   (a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

   (b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

4. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \Sigma)$. Probar que:

   (a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ $(E \in \Sigma)$,

   (b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

5. (a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar:

   $$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow \ \lambda(E) < \epsilon.$$

   (b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

6. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

   (a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

   $$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

   (b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

7. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, M, \delta)$ donde M es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

   $$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

   (a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

   $$\delta(A) = \int_A f(x)dx \qquad (\forall A \in M).$$

   (b) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

   (c) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta$.

8. Para cada medida finita ν sobre $(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}))$, se define $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

   $$f_\nu(x) = \nu((-\infty, x)).$$

   Probar:

   (a) f_ν es monótona creciente, acotada, continua por izquierda y

   $$\lim_{x \to -\infty} f_\nu(x) = 0.$$

   (b) f_ν es continua en $x_0 \Leftrightarrow \nu(\{x_0\}) = 0$.

   (c) Si m es la medida de Lebesgue,

   $$\nu \ll m \quad \Leftrightarrow \quad f_\nu \text{ es una función absolutamente continua.}$$

9. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ). Si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi, \ A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \ \mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi, \ A \cup B = X, \ \mu(A) = 0 \ \text{ y } \ \nu(B) = 0.$$

10. Sean Y un conjunto no numerable y

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq Y : A \text{ ó } Y \backslash A \text{ es a lo sumo numerable}\}.$$

Definimos $\alpha, \lambda : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\alpha(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & , \quad \text{si Card}(A) < \aleph_0 \\ +\infty & , \quad \text{si Card}(A) \geq \aleph_0 \end{cases} \qquad \lambda(A) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si Card}(A) \leq \aleph_0 \\ +\infty & , \quad \text{si Card}(A) > \aleph_0. \end{cases}$$

Probar que $\lambda \ll \alpha$ y que no existe f medible tal que:

$$\lambda(A) = \int_A f d\alpha \qquad , \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

11. Sean $(\mathcal{Y}, \Omega)$ un espacio medible y ν una medida con signo y finita sobre Ω. Probar:

   (a) existe g medible tal que $\nu(E) = \int_E g \, d|\nu|$, para todo $E \in \Omega$;

   (b) si g satisface (a), entonces $|\nu|(\{y \in \mathcal{Y} : |g(y)| \neq 1\}) = 0$.