Nombre y Apellido: L.U.:

# Segundo Parcial **Análisis Real - Medida y probabilidad**

1. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Supongamos que $\int f\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Probar que $f = 0$ ae.

2. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible y $0 < |E|$. Sean $f, g$ dos funciones definidas en $E$, medibles y positivas. Probar que si
$$\omega(\lambda) = |\{x \in E : g(x) > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{x \in E : g(x) > \lambda\}} f(x)dx,$$
y $g \in L^p(E)$ para $1 < p < \infty$ ,
$$\Big(\int_E g^p\Big)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\Big(\int_E f^p\Big)^{1/p}.$$

3. Sea $p : 1 < p < \infty$ y sea $K \in L^p(\mathbb{R}^d)$ una función con soporte compacto. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que: si $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ (donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) entonces
$$|K_\varepsilon * f(x)| \leq C\|K\|_p \big(M|f|^q(x)\big)^{\frac{1}{q}}.$$
Aquí $M$ es el operador maximal de Hardy Littlewood, la constante es independiente de $f$ y de $\varepsilon$ y $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}K(\frac{x}{\varepsilon})$.

4. Sean $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $K \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\int K = 1$ . Probar que si $x$ es un punto de continuidad de $f$, entonces
$$K_\varepsilon * f(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f(x).$$

5. Sean $\mu$ y $\lambda$ dos medidas finitas tales que $\mu \ll \lambda$. Probar que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que:
$$\int f d\mu = \int fg d\lambda \qquad \forall f \in L^1(\nu).$$