14 de Octubre de 2003

Nombre y Apellido: L.U.:

Primer parcial **Análisis Real - Medida y probabilidad**

1. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible que verifica:

$$|E \cap I| = |E||I| \qquad \forall\, I \text{ intervalo}$$

   (a) Probar que $|E \cap A| = |E||A|$, para todo A medible.

   (b) Calcular $|E|$

2. Sea $r_n = 1 - \alpha^{1/(n^2+n)}$, con $0 < \alpha < 1$. Sean $F_0 = [0,1]$, $F_1 = F_0 \setminus (\frac{1}{2} - \frac{r_1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{r_1}{2})$. Inductivamente, supongamos que

$$F_n = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{2^n} \text{ , con } |I_j| = l_n \text{ para todo } j = 1, \ldots, 2^n$$

   y definamos F_{n+1} suprimiendo de cada I_j de F_n el intervalo abierto concéntrico a I_j de longitud $r_{n+1}l_n$. Si $F = \bigcap_{n\geq 1} F_n$, probar que F es medible y hallar su medida.

3. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

   Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, integrables y no negativas tales que $f_n \rightrightarrows f$ entonces f es integrable.

   Dar una demostración si es verdadera o un contraejemplo si es falsa.

4. Sean $(f_n)_{n\geq 1} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ medibles y tales que $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^p$ (que depende de ε pero no de n) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^p \setminus E_\varepsilon} |f_n| \leq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   y existe una función g integrable tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in E_\varepsilon$. Probar que f es integrable y $\int f_n \to \int f$.

5. (a) Probar que si $f_n \geq 0$ y $\int f_n \to 0$ entonces $f_n \xrightarrow{m} 0$

   (b) Encontrar un contraejemplo que muestre que la recíproca no es cierta.

   (c) ¿Es cierta la parte a) si no se cumple la hipótesis $f_n \geq 0$?