

ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 4 : TEOREMA DE FUBINI.

1. (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.
(b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre \mathbb{R}^2 . Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y . Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x .
2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre \mathbb{R}^{n+m} es medible. Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en \mathbb{R}^{n+m} y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.
3. Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Si $h : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$ es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que:

$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \quad \forall (x, y) \in I \times I.$$

Probar que E no es medible.

5. Sea f una función medible y no negativa definida sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

La función ω se llama distribución de f sobre E . Probar:

- (a) $\omega : (0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.
- (b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.
- (c) $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$.
- (d) ω continua en $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$.
- (e) Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$.
- (f) $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$. (Sug.: Notar que $\int_E f = |R(f, E)| = \int \int_{R(f, E)} dx d\alpha$, y usar el Teorema de Tonelli.)

(g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

6. Usar el Teorema de Fubini para probar la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

7. Dada $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha / (1 + t)$ para todo $t \geq 0$, consideramos la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Demostrar:

(a) G es medible.

(b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$.

8. Definimos $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x, y) = x \cdot y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x, y) = f(x \cdot y)$ es medible.

9. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A - x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = |A||B|$.

10. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

11. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^p)$.

(a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^p$, la función $e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)$ (donde $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^p \xi_i x_i$) es medible e integrable. Se define la Transformada de Fourier de f como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^p} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad (\xi \in \mathbb{R}^p).$$

(b) Probar:

i. \hat{f} es acotada y uniformemente continua.

ii. $\hat{f}(\xi) \rightarrow_{|\xi| \rightarrow \infty} 0$, (Lema de Riemman–Lebesgue).

iii. Si $f(x) = f_1(x_1) \dots f_p(x_p)$, donde cada $f_k \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_p(\xi_p)$.

iv. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^p)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$.