

ANÁLISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 5 : DIFERENCIACIÓN.

1. Sea  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ . Probar:

(a) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ .

(b) Si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  entonces  $f^*$  es semicontinua inferiormente.

2. Definimos, para  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$$f^{**}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|$$

Probar que existen constantes  $c, C > 0$  que dependen sólo de la dimensión, tal que

$$cf^*(x) \leq f^{**}(x) \leq Cf^*(x)$$

es decir,  $f^{**}$  y  $f^*$  son funciones equivalentes.

3. Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  que satisface:  $|\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}| > 0$ . Probar que existe  $c > 0$  tal que  $f^*(x) \geq c|x|^{-d}$  para  $|x| \geq 1$ . Deducir que  $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ , salvo que  $f \equiv 0$ .

4. Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ .

(a) Probar que si  $1 \leq p < \infty$ , existe  $c > 0$  que no depende de  $f$  tal que para todo  $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x:|f(x)| \geq \alpha/2\}} |f(x)| dx.$$

(b) Probar que si  $1 < p \leq \infty$ , entonces  $f^* \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Además existe  $c_p > 0$  que no depende de  $f$  tal que  $\|f^*\|_p \leq c_p \|f\|_p$ .

5. Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Un punto  $x$  se dice *punto de Lebesgue de  $f$*  sii

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \text{ cuando } Q \searrow x$$

Probar que casi todo punto de  $\mathbb{R}^d$  es un punto de Lebesgue de  $f$ .

6. Sea  $\{S\}$  una familia de conjuntos medibles. Se dice que  $\{S\}$  se *contrae regularmente a  $x$*  sii

- (a) Los diámetros de los conjuntos  $S$  tienden a 0
- (b) Si  $Q$  es el cubo más pequeño con centro en  $x$  que contiene a  $S$ , entonces existe una constante  $k$  independiente de  $S$  tal que  $|Q| \leq k|S|$

Los conjuntos  $S$  no necesitan contener a  $x$ .

- (a) Probar que  $\{B(x, r)\}_{r>0}$  se contrae regularmente a  $x$
- (b) Probar que si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ , entonces en todo punto de Lebesgue de  $f$

$$\frac{1}{|S|} \int_S |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0$$

para toda familia  $\{S\}$  que se contrae regularmente a  $x$ .

7. Sea  $\phi$  definida sobre  $\mathbb{R}^d$  una función medible y acotada tal que  $\text{sop}(\phi) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$  y  $\int_{\mathbb{R}^d} \phi dx = 1$ . Para cada  $\epsilon > 0$ , sea  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \phi(x/\epsilon)$ . Dada  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , probar que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * \phi_\epsilon)(x) = f(x),$$

si  $x$  es un punto de Lebesgue de  $f$ .

8. Hallar  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x) dx < f(1) - f(0).$$

9. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  integrable y  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Probar:

- (a)  $F$  es absolutamente continua.
- (b)  $F$  es derivable en casi todo punto y  $F'(x) = f(x)$ .

10. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente creciente y absolutamente continua con  $g(a) = c$  y  $g(b) = d$ .

- (a) Si  $G \subseteq [c, d]$  es abierto, entonces  $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x) dx$ .
- (b) Sea  $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$ . Si  $E \subseteq [c, d]$  y  $|E| = 0$  entonces  $g^{-1}(E) \cap H$  tiene medida nula.
- (c) Si  $E \subseteq [c, d]$  es medible, entonces  $F = g^{-1}(E) \cap H$  es medible y  $|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x)) g'(x) dx$ .
- (d) Si  $f$  es medible y no negativa sobre  $[c, d]$ , entonces  $(f \circ g)g'$  es medible sobre  $[a, b]$  y  $\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$ .

11. Sean  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , absolutamente continua en  $[a, b]$ ,  $g$  integrable sobre  $[a, b]$  y

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Probar que:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$