

ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 6 : ESPACIOS  $L^p$ .

1. Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  de medida finita y  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ .
  - (a) Probar que  $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$ .
  - (b) Mostrar que  $|E| < \infty$ , es una condición necesaria para la inclusión.
2. Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible y  $1 \leq r \leq p \leq s < \infty$ . Si  $f \in L^r(E) \cap L^s(E)$ , entonces  $\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s$ .
3. Probar que:
  - (a) Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(E)$ , para algún  $p : 1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $f_n \xrightarrow{m} f$  sobre  $E$ .
  - (b) Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(E)$ ,  $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$  en  $L^q(E)$ , y  $1/p + 1/q = 1$ , entonces  $f_n g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f g$  en  $L^1(E)$ .
  - (c) Si  $|E| < \infty$  y  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^\infty(E)$ , entonces  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(E)$ , para todo  $p \geq 1$ .
4. Dadas las funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

probar que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  a.e. y  $f_n \xrightarrow{m} 0$ , pero  $f_n$  no converge en  $L^p([0, 1])$  para  $p : 1 \leq p \leq \infty$ .

5. Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible,  $(f_n)_{n \geq 1}$  y  $f$  en  $L^p(E)$ , para  $p : 1 \leq p < \infty$ . Probar:
  - (a)  $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|f_n\|_{L^p(E)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)}$ .
  - (b) Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  a.e. sobre  $E$ , entonces:

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^p(E)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Sug.: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión:  $g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p$ .)

6. Sea  $k : \mathbb{R}^{d+d} \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que existe  $c > 0$  que verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int |k(x, y)| dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int |k(x, y)| dx \leq c.$$

Probar que si  $1 < p < \infty$ , entonces  $K : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$  dada por

$$K(f)(x) = \int k(x, y)f(y)dy$$

está bien definida y es uniformemente continua.

7. Para  $1 \leq p < \infty$  y  $0 < |E| < \infty$ , definimos:

$$N_p[f] = \left( \frac{1}{|E|} \int_E |f|^p \right)^{1/p}.$$

Probar:

- (a)  $p_1 < p_2 \Rightarrow N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$ .
  - (b)  $N_p[f + g] \leq N_p[f] + N_p[g]$ .
  - (c)  $\frac{1}{|E|} \int_E |fg| \leq N_p[f]N_{p'}[g]$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ .
  - (d)  $\lim_{p \rightarrow \infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$ .
8. Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que  $0 < |E| < \infty$  y  $f \in L^\infty(E)$  que verifica  $\|f\|_\infty > 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos  $a_n = \int_E |f(x)|^n dx$ . Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = \|f\|_\infty$ .
9. Supongamos que  $f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f$  a.e. y que  $f_n, f \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ . Si  $\|f_n\|_p \leq M < \infty$ , demostrar que  $\int f_n g \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int f g$ , para toda  $g \in L^{p'}$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ . ¿Es cierto este resultado para  $p = 1$ ?  
(Hint: Suponer primero que  $g$  es una función característica).
10. Si  $f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $g_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} g$  puntualmente y  $\|g_n\|_\infty \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , probar que  $f_n g_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f g$  en  $L^p$ .
11. Muestre que cuando  $0 < p < 1$ , los entornos  $\{f \in L^p(0, 1) : \|f\|_p < \varepsilon\}$  de 0, no son convexos.

12. Sea  $f$  tal que para todo  $\alpha > 0$ ,

$$\omega(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \alpha\}| \leq c(1 + \alpha)^{-p}.$$

Probar que  $f \in L^r(\mathbb{R}^d)$ , si  $0 < r < p$ .

13. Sea  $E = [0, 1/2]$ . Probar:

- (a)  $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(E)$ , ( $1 \leq p < \infty$ ), pero  $f \notin L^r(E)$  si  $r > p$ .
- (b)  $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$  para todo  $p : 1 \leq p < \infty$ , pero  $g \notin L^\infty(E)$ .

14. Sea  $E = [0, \infty)$ . Probar que  $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$  pero  $f \notin L^p(E)$  para ningún  $p : 1 \leq p < \infty$ , y  $p \neq 2$ .

15. Dada  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , probar que:

$$(a) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) + f(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{|h| \rightarrow \infty} 2^{1/p} \|f\|_p$$

$$(b) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) + f(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 2 \|f\|_p$$

16. (a) Dadas funciones  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  y  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$  donde  $1/p + 1/p' = 1$ , probar que la convolución  $f * g(x)$  existe y es finita para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Además define una función acotada y uniformemente continua.

(b) Dado  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que  $0 < |E| < \infty$ , probar que:

$$E - E = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un conjunto abierto no vacío. (Sug.: considerar  $\chi_E * \chi_{-E}$ .)

17. Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, para cada  $h > 0$  sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x) dx.$$

Si  $f \in L^p$ , probar que:

$$(a) \|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p} \|f\|_p.$$

$$(b) f_h \in L^p \text{ y } \|f_h\|_p \leq \|f\|_p.$$

$$(c) \text{ Para cada } r \geq p \geq 1, \|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p} \|f\|_p.$$

$$(d) \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

18. Sean  $1 < p < \infty$ ,  $1/p + 1/p' = 1$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Probar:

$$(a) \|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx \right|.$$

(b) Si  $(f_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión de funciones de  $L^p$  tal que para toda  $g \in L^{p'}$  resulta:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k g dx = \int_{\mathbb{R}^d} f g dx$ , entonces:

$$\|f\|_p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_p.$$

19. Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible y  $p \geq 1$ . Definimos:

$$L_*^p(E) = \{f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ medible} : \sup_{t>0} t(|\{x \in E : |f(x)| > t\}|)^{1/p} < \infty\}.$$

Probar:

$$(a) L^p(E) \subseteq L_*^p(E),$$

$$(b) \text{ si } |E| < \infty \text{ y } p > 1, \text{ entonces } L_*^p(E) \subseteq L^1(E).$$

20. Dados  $[a, b]$  un intervalo acotado y  $f \in L^p([a, b])$   $1 < p < \infty$ , definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad , \quad x \in [a, b].$$

Probar que existe una constante  $K$  tal que para toda partición  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  resulta:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \leq K.$$