ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 7 : MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS.

1. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

   (a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

   (b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

2. Sean X un conjunto y $A_1, \ldots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^{N} A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$álgebra generada por $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Probar:

   (a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen $i_1, \ldots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^{k} A_{ij}$.

   (b) Si f es $\Sigma-$medible, entonces f es constante sobre cada A_i.

3. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k \geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge uniformemente en A.

4. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \overset{m}{\to} f$) si para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k \to \infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

   Probar:

   (a) Si $f_k \to f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E.

   (b) Si $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E, existe una subsucesión $(f_{kj})_{j \geq 1}$ tal que $f_{kj} \to f$ a.e. en E.

5. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f \text{ en } X \backslash A_\epsilon.$$

   Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

6. Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida y μ y ν dos medidas sobre Σ tales que
$\mu(A)\leq\nu(A)$, para todo $A\in\Sigma$. Probar que
$$f\in L^1(X,\nu) \qquad \Rightarrow \qquad f\in L^1(X,\mu).$$

7. Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.
   (a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1}d\mu\to 0$, probar que $f_n\overset{m}{\to}0$.
   (b) Si $\mu(X)<\infty$ y $f_n\overset{m}{\to}0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1}d\mu\to 0$.

8. Sean $X=\mathbb{N},\ \Sigma=P(\mathbb{N})$ y $\mu(A)=C(A)$. Probar que $f\in L^1(\mathbb{N},\mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$ y, en este caso $\int_{\mathbb{N}} f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$.

9. Sean $X=\mathbb{N}$ y μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que: $\mu(E)=\sum_{n:n\in E}\frac{1}{n^2}$.
   (a) Probar que μ es una medida finita.
   (b) Para cada $k\in\mathbb{N}$, definimos $f_k:X\to\mathbb{R}$,
   $$f_k(n)=\begin{cases}\sqrt{n} & , \quad 1\leq n\leq k\\ 0 & , \quad k<n.\end{cases}$$
   Probar que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en μ–medida.
   (c) Sea $f:X\to\mathbb{R},\ f(n)=\sqrt{n}\ (n\in\mathbb{N})$. ¿Para qué valores de $p\geq 1$, resulta $f\in L^p(X,\mu)$?

10. Sean (X,Ω,ν) un espacio de medida finita y $\varphi:X\to\mathbb{R}_{>0}$ una función ν–medible. Probar que:
    (a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi\ln(\varphi)\,d\nu$,
    (b) si φ pertenece a $L^2(X,d\nu)$ entonces $\varphi\ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X,d\nu)$.

11. Sean $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ espacio medible, $\mu:\mathcal{F}\to\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ que satisface:
    (a) $A,B\in\mathcal{F}\ \wedge\ A\cap B=\emptyset\ \Rightarrow\ \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$
    (b) $A_n\in\mathcal{F}\ (n\in\mathbb{N})\ \wedge\ A_n\searrow\emptyset\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$.

    Probar que μ es una medida.

12. Sean $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\},\ \varphi:[0,1)\to S^1,\ \varphi(t)=e^{2\pi it}$. En S^1 se considera la $\sigma-$álgebra
    $$\mathcal{A}=\{A\subseteq S^1:\varphi^{-1}(A)\text{ es medible Lebesgue}\}$$
    y la medida m sobre $\mathcal{A}$ definida por:
    $$m(A)=|\varphi^{-1}(A)|.$$

Dada $f : S^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es $\mathcal{A}-$medible y

$$\int_{S^1} f \; dm = \int_0^1 f \circ \varphi \; dt.$$

13. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

    (a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

    (b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

14. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$
    $(E \in \Sigma)$. Probar que:

    (a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu \; (E \in \Sigma)$,

    (b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu \; (E \in \Sigma)$.

15. (a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar:

    $$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \; \mu(E) < \delta \; \Rightarrow \; \lambda(E) < \epsilon.$$

    (b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

16. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

    (a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu \; (B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

    $$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

    (b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

17. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, M, \delta)$ donde M es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

    $$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

    (a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

    $$\delta(A) = \int_A f(x) dx \qquad (\forall A \in M).$$

(b) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

(c) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta$.

18. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ). Si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi, \; A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \; \mu(A_\epsilon) < \epsilon \; \text{ y } \; \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi, \; A \cup B = X, \; \mu(A) = 0 \; \text{ y } \; \nu(B) = 0.$$

19. Para cada medida de Borel finita ν sobre $\mathbb{R}$, se define $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f_\nu(x) = \nu((-\infty, x)).$$

Probar:

(a) f_ν es monótona creciente, acotada, continua por izquierda y

$$\lim_{x \to -\infty} f_\nu(x) = 0.$$

(b) f_ν es continua en $x_0 \Leftrightarrow \nu(\{x_0\}) = 0$.

(c) Si $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue,

$$\nu \ll \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad f_\nu \text{ es una función absolutamente continua.}$$

20. Notemos con $\mathcal{H}^\alpha$ a la medida de Haussdorf α-dimensional. Probar:

(a) $\mathcal{H}^\alpha(x + E) = \mathcal{H}^\alpha(E), \forall x \in \mathbb{R}^d$

(b) $\mathcal{H}^\alpha(cE) = c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E), \quad \forall c > 0, \forall E medible$

(c) Si E es medible y $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0 \forall \quad \beta > \alpha$

(d) Si E es medible y $\mathcal{H}^\alpha(E) > 0$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty \forall \beta < \alpha$

21. Dado $E \subset \mathbb{R}^d$ definimos *dimensión de E* como

$$dim(E) = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}.$$

Probar

(a) $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0 \quad \forall \alpha > dim(E)$

(b) Sea $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos tales que $dim(E_k) = d \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces $dim(\cup E_k) = d$. Concluír que la dimensión de cualquier conjunto numerable es cero.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una aplicación bi-Lipschitz (es decir, que existen constantes c, C positivas tales que

$$c|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|).$$

Probar que $dim(E) = dim(f(E))$

22. Probar que:

    (a) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$

    (b) En $\mathbb{R}^d$ existen constantes positivas a, b tales que

    $$a\mathcal{L}^d \leq \mathcal{H}^d \leq b\mathcal{L}^d.$$

    (*Observación:* puede probarse que existe una constante c_d tal que $\mathcal{H}^d = c_d \mathcal{L}^d$).

    (c) Concluír que $dim(\mathbb{R}^d) = d$ y $dim(E) \leq d \quad \forall E \subset \mathbb{R}^d$.

23. Sea $E \subset \mathbb{R}$. Probar que si existe un $0 < \alpha < 1$ tal que $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$ entonces E es totalmente disconexo (es decir que las componentes conexas de E son los puntos).