ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2004.

PRACTICA 0

1. Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{j\in J}$ dos familias de conjuntos. Probar:

(a) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cap Y_j)$

(c) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

(d) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

(e) Si $I = J$ y $\forall\ i \in I$ se tiene $Y_i \subset X_i$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subset \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)$$

(f) Si $A \subset I$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in A} X_i\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subset \left(\bigcap_{i\in A} X_i\right)$$

(g) Para cada conjunto F se tiene:

$$F - \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(F - X_i)$$

(h) Encontrar conjuntos A_{nk} $(n, k \in \mathbb{N})$ tales que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{nk} \neq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{nk}$$

2. Sean $(J_l)_{l\in L}$ y $(X_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos tales que $I = \bigcup_{l\in L} J_l$. Probar:

   (a) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{l\in L}\left(\bigcup_{i\in J_L} X_i\right)$

   (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{l\in L}\left(\bigcap_{i\in J_L} X_i\right)$

3. Si $A\times B = (A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$ con $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = \emptyset$, $A_1\times B_1 \neq \emptyset$ y $A_2\times B_2 \neq \emptyset$ entonces

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1\cup B_2) \text{ ó } (A = A_1\cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B).$$

4. Sean $f : E \to F,\ A\subset E,\ B\subset E,\ C\subset F,\ D\subset F.$

   Probar:

   (a) $A\subset B \Rightarrow f(A)\subset f(B)$
   (b) $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$
   (c) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$
   (d) si f es inyectiva $\Rightarrow f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$
   (e) $A\subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D))\subset D$
   (f) si f es inyectiva $\Rightarrow f(E-A)\subset F-f(A)$
   (g) si f es suryectiva $\Rightarrow f(E-A)\supset F-f(A)$
   (h) $f^{-1}(F-B) = E-f^{-1}(B)$

5. Sea $f : E\to F$ una función. Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_j)_{j\in J}$ dos familias de subconjuntos de E y F respectivamente. Probar:

   (a) $f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$
   (b) $f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(X_i)$
   (c) si f es inyectiva $\Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} f(X_i)$
   (d) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$
   (e) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

6. Dada una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E, se define:

$$\underline{lim}\ E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k \quad \text{(límite inferior)}$$

$$\overline{lim}\ E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k \quad \text{(límite superior)}$$

Probar:

(a) $E - \underline{lim}\ E_n = \overline{lim}\ (E - E_n)$

(b) $E - \overline{lim}\ E_n = \underline{lim}\ (E - E_n)$

(c) $\underline{lim}\ E_n \subset \overline{lim}\ E_n$
Si $\underline{lim}\ E_n = \overline{lim}\ E_n$, entonces se dice que existe el límite de la sucesión E_n y a este conjunto se lo denota por $lim\ E_n$. Probar:

(d) Si $E_{n+1} \subset E_n \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow lim\ E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

(e) Si $E_n \subset E_{n+1} \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow lim\ E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$

(f) Dada una sucesión de subconjuntos de E se define:

$$\begin{cases} D_0 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \bigtriangleup E_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Probar que existe $lim\ D_n$ si y sólo si $lim\ E_n = \emptyset$.

7. Sean A y B subconjuntos de un conjunto X, se define:
$\chi_A : X \to \{0,1\}$ como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(a) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)\ \forall\ x \in X$

(b) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)\ \ \forall\ x \in X$

(c) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)\ \ \forall\ x \in X$

8. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \to Y$. Probar:

(a) $f(\underline{lim}\ E_n) \subset \underline{lim}\ f(E_n)$

(b) $f(\overline{lim}\ E_n) \subset \overline{lim}\ f(E_n)$

(c) $f(\underline{lim}\ E_n) \subset \overline{lim}\ f(E_n)$

(d) Si f es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

9. Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que si:

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

Sean

$$V = \bigcap\{Z \subset E :\ f(Z) \subset Z\},$$
$$W = \bigcup\{Z \subset E :\ Z \subset f(Z)\}.$$

Probar que:

(a) $f(V) = V$ y $f(W) = W$

(b) Sea $A \subset E$ tal que $f(A) = A \Rightarrow V \subset A \subset W$