

ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2004.

PRACTICA 1: MEDIDA DE LEBESGUE.

1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $E = A \cup B$, donde $|B| = 0$. Probar que A es medible.
2. Sea $E \subseteq A$ con $|A| = 0$. Probar que E es medible y que $|E| = 0$. Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c . Cual es el cardinal de los no medibles ?
3. (a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de \mathbb{R}^2 de medida cero.
(b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.
(c) Y si f tiene finitas discontinuidades ?

4. Si E_1 y E_2 son medibles, mostrar que

$$|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

5. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(x) = x + v$. Probar:

- (a) $|T(E)|_e = |E|_e$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Consideramos el conjunto

$$rA = \{r.a : a \in A\}.$$

Probar:

- (a) $|rA|_e = r^n |A|_e$.
- (b) Si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^n |A|$.

7. Sea $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

- (a) Suponiendo conocida $|B(0, 1)|$, calcular $|B(0, r)|$.
- (b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(r) = |A \cap B(0, r)|$ es continua.
- (c) Si A es medible, para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$, existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.
- (d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $0 < |A| < \infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n subconjuntos disjuntos de $A : (A_j)_{1 \leq j \leq n}$ tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $j : 1 \leq j \leq n$.

8. Sea $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Probar que: $E \subseteq [0, 1)$ medible $\Rightarrow T^{-1}(E)$ medible. Además $|T^{-1}(E)| = |E|$.

9. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n \geq 1}$ definimos

$$A_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad A^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar:

- (a) A_* y A^* son medibles.
 - (b) $|A_*| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
 - (c) Si para algún n , $|\cup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$, entonces $|A^*| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
 - (d) Si $\sum_{n \geq 1} |A_n| < \infty$, entonces $|A^*| = 0$.
 - (e) Que pasa si A_n es creciente? (Es decir si $A_n \subseteq A_{n+1}$).
10. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene la potencia del continuo.
11. Construir un subconjunto de $[0, 1]$ como el conjunto de Cantor excepto que en el k -ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$, $0 < \delta < 1$. Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

12. Sea E el conjunto de puntos del $(0,1)$ tal que: $x \in E$ si y sólo si en el desarrollo decimal de x no aparece el dígito 7. Mostrar que E tiene medida de Lebesgue 0.
13. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
- E es medible.
 - Para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \setminus F|_e < \epsilon$.
 - Existen H de clase F_σ y N de medida cero, tal que $E = H \cup N$.
14. Construya una sucesión de conjuntos $\{E_k\}$ disjuntos tal que $|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k|_e < \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k|_e$. (Considerar translaciones racionales de conjuntos de Vitali).
15. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Mostrar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.
16. Sea $E \subset \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: existe $q, 0 < q < 1$ tal que para todo intervalo (a,b) , el conjunto $E \cap (a,b)$ puede cubrirse con numerables intervalos cuya suma de longitudes es a lo sumo $q(b-a)$. Entonces E es un conjunto de medida nula.
17. Sean $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Denotemos por I' los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas, y por $|E|'_e$ la medida exterior de un conjunto E relativo a este sistema de coordenadas. Probar que $|E|'_e = |E|_e$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$.
18. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible con $|E| > 0$. Probar que dado $\epsilon > 0$ existe un intervalo I tal que $|E \cap I| > 0$ y $|I - (E \cap I)| < \epsilon$.
19. Mostrar que existe un subconjunto H del intervalo $[0,1]$ de clase F_σ , de medida uno, formado solo por puntos irracionales. Probar que H es unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío.
20. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible que cumple la siguiente propiedad, si $x \in E$ e $y \in E$ entonces $\frac{x+y}{2} \notin E$. Probar que E tiene medida cero. Sugerencia: Probar que si I es un intervalo centrado en un punto de E entonces $|E \cap I| \leq \frac{1}{2}|I|$.