Nombre y Apellido: L.U.:

13 de Octubre de 2004

Análisis Real - 2° cuatrimestre 2004
PRIMER PARCIAL

1. Sea E un conjunto medible y sea $A \subset E$. Probar que

$$|E \setminus A|_e = \inf\{|E \setminus F| : F \subset A \text{ y } F \text{ cerrado}\}.$$

2. Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sea f una función medible y no negativa definida en $\mathbb{R}^n$. Definimos el conjunto

$$O_E(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E,\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t < f(x)\}.$$

Probar que $O_E(f)$ es medible en $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ resulta $\int_I f dx = 0$. Demostrar que $f = 0$ a.e.

4. Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ una función medible. Definimos las funciones $f_n : E \to \mathbb{R}$ como:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n. \end{cases}$$

Probar que:

(a) Si f es integrable entonces $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

(b) Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n| < \infty$ entonces f es integrable.

5. Decidir si las siguiente afirmaciones son Verdaderas o Falsas.

(a) Si $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos σ-elementales entonces $\cap_{j\in\mathbb{N}} U_j$ es σ-elemental.

(b) No existe ninguna función integrable ϕ tal que $nxe^{-nx^2} \leq \phi(x)$ para casi todo $x \in (0, +\infty)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) El disco unitario cerrado $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ es un conjunto σ-elemental.

(d) Sean f_n y f funciones no negativas y medibles. Si $\int |f_n - f| \to 0$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$.