

## ANALISIS REAL.

*Segundo Cuatrimestre de 2004.*

### PRACTICA 1: MEDIDA DE LEBESGUE.

1. Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^p$  medible y tal que  $E = A \cup B$ , donde  $|B| = 0$ . Probar que  $A$  es medible.
2. Sea  $E \subseteq A$  con  $|A| = 0$ . Probar que  $E$  es medible y que  $|E| = 0$ . Deducir que el cardinal de los medibles es  $2^c$ . Cual es el cardinal de los no medibles ?.
3. (a) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar que el gráfico de  $f$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  de medida cero.  
(b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.  
(c) Y si  $f$  tiene finitas discontinuidades ?.
4. Si  $E_1$  y  $E_2$  son medibles, mostrar que

$$|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

5. Sean  $v \in \mathbb{R}^p$  y  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $T(x) = x + v$ . Probar:  
(a)  $|T(E)|_e = |E|_e$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^p$ .  
(b) Si  $E$  es medible entonces  $T(E)$  es medible y  $|T(E)| = |E|$ .
6. Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  y  $r > 0$ . Consideramos el conjunto

$$rA = \{r \cdot a : a \in A\}.$$

Probar:

- (a)  $|rA|_e = r^p |A|_e$ .
- (b) Si  $A$  es medible entonces  $rA$  es medible y  $|rA| = r^p |A|$ .
7. Sea  $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| < r\}$ .  
(a) Suponiendo conocida  $|B(0, 1)|$ , calcular  $|B(0, r)|$ .  
(b) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  medible. Probar que  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:  $f(r) = |A \cap B(0, r)|$  es continua.  
(c) Si  $A$  es medible, para cada  $s : 0 \leq s \leq |A|$ , existe  $B \subseteq A$  medible tal que  $|B| = s$ .  
(d) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  medible y tal que  $0 < |A| < \infty$ . Probar que dado  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $n$  subconjuntos disjuntos de  $A : (A_j)_{1 \leq j \leq n}$  tales que  $|A_j| = |A|/n$ , para cada  $j : 1 \leq j \leq n$ .
8. Sea  $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Probar que:  $E \subseteq [0, 1)$  medible  $\Rightarrow T^{-1}(E)$  medible. Además  $|T^{-1}(E)| = |E|$ .

9. Para cada sucesión de conjuntos medibles  $(A_n)_{n \geq 1}$  definimos

$$A_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad A^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar:

- (a)  $A_*$  y  $A^*$  son medibles.
  - (b)  $|A_*| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ .
  - (c) Si para algún  $n$ ,  $|\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$ , entonces  $|A^*| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ .
  - (d) Si  $\sum_{n \geq 1} |A_n| < \infty$ , entonces  $|A^*| = 0$ .
  - (e) Que pasa si  $A_n$  es creciente ?. (Es decir si  $A_n \subseteq A_{n+1}$ ).
10. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene la potencia del continuo.
11. Construir un subconjunto de  $[0, 1]$  como el conjunto de Cantor excepto que en el  $k$ -ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud  $\delta 3^{-k}$ ,  $0 < \delta < 1$ . Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida  $1 - \delta$  y no contiene intervalos.
12. Sea  $E$  el conjunto de puntos del  $(0, 1)$  tal que:  $x \in E$  si y sólo si en el desarrollo decimal de  $x$  no aparece el dígito 7. Mostrar que  $E$  tiene medida de Lebesgue 0.
13. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
- (a)  $E$  es medible.
  - (b) Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $F \subseteq E$  cerrado tal que  $|E \setminus F|_e < \epsilon$ .
  - (c) Existen  $H$  de clase  $F_\sigma$  y  $N$  de medida cero, tal que  $E = H \cup N$ .
14. Construya una sucesión de conjuntos  $\{E_k\}$  disjuntos tal que  $|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k|_e < \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k|_e$ . (Considerar translaciones racionales de conjuntos de Vitali).
15. Para cada  $E \subseteq \mathbb{R}^p$  definimos su medida interior

$$|E|_i = \sup\{|F| : E \supseteq F, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar:

- (a)  $|E|_i \leq |E|_e$ .
  - (b) Si  $E$  es medible entonces  $|E|_i = |E|_e$ .
  - (c) Si  $|E|_e < \infty$  y  $|E|_i = |E|_e$ , entonces  $E$  es medible.
  - (d) Existe  $E$  no medible tal que  $|E|_i = |E|_e$ .
  - (e)  $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$ .
  - (f)  $(E_j)_{j \geq 1}$  disjuntos, entonces  $|\bigcup_{j \geq 1} E_j|_i \geq \sum_{j \geq 1} |E_j|_i$ .
16. Sea  $V$  un conjunto de Vitali. Si  $E$  es medible y  $E \subseteq V$  entonces  $|E| = 0$ . Luego  $|V|_i = 0$ .
17. (a) Construir una sucesión de conjuntos  $(E_j)_{j \geq 1}$  tal que  $|\bigcup_{j \geq 1} E_j|_i > \sum_{j \geq 1} |E_j|_i$ . ( $V \subseteq [0, 1]$  un Vitali y  $\{r_j\}_{j \geq 1}$  numeración de los racionales del  $[-1, 1]$ . Si  $E_j = r_j + V$ , entonces  $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j \geq 1} E_j$  y  $\sum_{j \geq 1} |E_j|_i = 0$ .)

- (b) Construir  $E \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $|E|_i < \infty$  y  $|E|_e = \infty$ . (Sean  $T_n \subseteq [2(n-1), 2(n-1) + 1]$  ternario de medida  $1/2^n$ ,  $V_1 \subseteq [1 + 1/4, 1 + 3/4]$  un Vitali y  $V_n = 2(n-1) + V_1 \subseteq [2(n-1) + 1, 2(n-1) + 2]$ , definir  $E = \bigcup_{n \geq 1} (T_n \cup V_n)$ .)

18. Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^p$  medible y  $A \subseteq E$ . Probar que:

$$|E| = |A|_i + |E \setminus A|_e.$$

19. Sea  $Z \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $|Z| = 0$ . Mostrar que  $E = \{x^2 : x \in Z\}$  tiene medida nula.
20. Sea  $E \subset \mathbb{R}$  con la siguiente propiedad: existe  $q, 0 < q < 1$  tal que para todo intervalo  $(a, b)$ , el conjunto  $E \cap (a, b)$  puede cubrirse con numerables intervalos cuya suma de longitudes es a lo sumo  $q(b - a)$ . Entonces  $E$  es un conjunto de medida nula.
21. Sean  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Denotemos por  $I'$  los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas, y por  $|E|'_e$  la medida exterior de un conjunto  $E$  relativo a este sistema de coordenadas.

Probar que  $|E|'_e = |E|_e$  para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$

22. Sea  $E \subset \mathbb{R}^N$  medible con  $|E| > 0$ . Probar que dado  $\epsilon > 0$  existe un intervalo  $I$  tal que  $|E \cap I| > 0$  y  $|I - (E \cap I)| < \epsilon$ .
23. Mostrar que existe un subconjunto  $H$  del intervalo  $[0, 1]$  de clase  $F_\sigma$ , de medida uno, formado solo por puntos irracionales. Probar que  $H$  es union numerable de conjuntos cerrados de interior vacio.
24. Sea  $E \subset \mathbb{R}$  medible que cumple la siguiente propiedad, si  $x \in E$  e  $y \in E$  entonces  $\frac{x+y}{2} \notin E$ . Probar que  $E$  tiene medida cero. Sugerencia: Probar que si  $I$  es un intervalo centrado en un punto de  $E$  entonces  $|E \cap I| \leq \frac{1}{2}|I|$ .