Nombre y Apellido: L.U.:

3 de Diciembre de 2004

Análisis Real - 2° cuatrimestre 2004
SEGUNDO PARCIAL

1. Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ y sea $0 \leq \theta \leq 1$. Llamemos p al único número real tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$. Probar que, si $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}) \cap L^{p_2}(\mathbb{R})$, entonces $f \in L^p(\mathbb{R})$ y
$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\theta} \|f\|_{p_2}^{1-\theta}.$$

2. Sea $0 < p < 1$. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ de medida finita. Probar que exite una constante $a_p > 0$ tal que para cada función $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, se verifica:
$$\left(\int_E Mf(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq a_p |E|^{\frac{1-p}{p}} \|f\|_1.$$

3. Sean $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $\int K = 1$. Probar que si x es un punto de continuidad de f, entonces
$$K_\varepsilon * f(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f(x),$$
donde $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} K(\frac{x}{\varepsilon})$.

4. Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$, con $x_k \neq x_j$ si $k \neq j$. Definimos la medida
$$\delta_{x_k}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \in E \\ 0 & \text{si } x_k \notin E. \end{cases}$$
Sea $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_{x_k}$. Probar que :
   (a) μ es una medida en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
   (b) $f \in L^1(\mu)$ si, y sólo si, $\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(x_k)| < \infty$.
   (c) En la situación del inciso (b), $\int f d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(x_k)$.

5. Sea (X, Σ) un espacio de medida. Sean μ y ν dos medidas finitas en ese espacio. Definamos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\overline{\mu} = \mu + \nu$.
   (a) Probar que existe una función $f \in L^1(\overline{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\overline{\mu}$ y que $0 \leq f(x) < 1$ para μ-casi todo x.
   (b) Deducir que $\int g d\nu = \int g f d\overline{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.
   (c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \Sigma$ entonces $h(x) = \dfrac{f(x)}{1 - f(x)}$ para μ-casi todo $x \in X$.
   Sugerencia: reescribir el item (b) como $\int g(1-f) d\nu = \int g f d\mu$ y elegir una g adecuada.