1	2	3	4	Calif.

Nombre y Apellido:

16 de Mayo de 2005

Análisis Real - Medida y Probabilidad. Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2005

1. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible tal que para todo rectángulo $J \subset \mathbb{R}^d$ se verifica:
$$|E \cap J| \leq |E||J|.$$
Probar que para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ medible se verifica $|E \cap A| \leq |E||A|$.

2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Si
$$|\{x \in E : |f_k(x)| \geq \frac{1}{k^2}\}| < \frac{1}{k^2},$$
entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ es convergente para casi todo $x \in E$.

3. Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles y no negativas definidas en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ medible.
Si $f_n \xrightarrow{m} f$ entonces
$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

4. Sea $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0.$$